

1. Отрезок EF соединяет середины ребер AC и BD тетраэдра ABCD. Докажите, что $2FE = BA + DC$. Компланарны ли векторы FE, BA и DC?

Решение :

Введем векторы AC и CB.

$$FE = FD + DC + CE. (1)$$

$$FE = FB + BA + AE. (2)$$

Из (1)

$$FE = \frac{1}{2}BD + DC - EC = \frac{1}{2}BD + DC - \frac{1}{2}EC. (3)$$

$$\text{Из (2) } FE = -FD + BA + AE = \frac{1}{2}BD + BA + \frac{1}{2}AC. (4)$$

$$\text{Сложим (3) и (4): } 2 \cdot FE = DC + BA, FE = \frac{DC + BA}{2}.$$

Согласно определению, векторы FE, BA и DC компланарны.