1. Докажите, что при центральной симметрии: а) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую; б) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

Доказательство

а) Через центр симметрии и данную прямую можно провести единственную плоскость (см. «Некоторые следствия из аксиом, 1»).

Примем O – центр симметрии, a – данная прямая, а – плоскость, проведенная через O и a.

Выберем точку $A \in a$, проведем отрезок OA. Продолжим OA за точку O на расстояние $OA_1 = AO$. Получим точку A_1, симметричную A.

Выберем точку $B \in a$, проведем отрезок OB. Продолжим OB за точку O на расстояние $OB_1 = OB$. Получим точку B_1, симметричную точке B.

Через A_1 и B_1 проведем прямую b. Рассмотрим ΔAOB и $\Delta A_1OB_1 \cdot AO = A_1O$, $BO = OB_1$, $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$ как вертикальные, поэтому $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$.

Тогда $\angle 1 = \angle 2$, а они являются внутренними накрест лежащими углами. По признаку параллельности двух прямых на плоскости $a||b$.

б) Выберем некоторую точку $A \in a$. Для нее симметричная точка A_1 тоже принадлежит прямой a; $AO = OA_1$.

Точка A выбрана произвольно, поэтому любая точка прямой и ей симметричная точка относительно центра O лежат на прямой a, поэтому прямая a переходит сама в себя при условии, что проходит через центр симметрии.