●Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{a}$; б) $\vec{b}-2\vec{a}$ и $\vec{a}$? Ответ обоснуйте.

Сумма коллинеарных векторов есть коллинеарный им вектор. Поэтому **а)** да; **б)** да.

●Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то: а) векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ не коллинеарны; б) векторы $2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{b}$ не коллинеарны; в) векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}+3\vec{b}$ не коллинеарны.

а) Допустим, что $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Тогда

$$\vec{a}+\vec{b}=k\left(\vec{a}-\vec{b}\right);\ \vec{a}+\vec{b}=k\vec{a}-k\vec{b};\vec{a}\left(1-k\right)=\vec{b}\left(-1-k\right);\vec{a}=\frac{-1-k}{1-k}\vec{b}.$$

Обозначим $\frac{-1-k}{1-k}=d$, тогда $\vec{a}=d\vec{b}$, но это противоречит условию ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны). Значит наше предположение не верно, т.е. $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ не коллинеарны, ч.т.д.

б) Допустим, что $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$ и $\vec{a}+\vec{b}$ коллинеарны. Тогда

$$2\vec{a}-\vec{b}=k\left(\vec{a}+\vec{b}\right);\ 2\vec{a}-\vec{b}=k\vec{a}+k\vec{b};\vec{a}\left(2-k\right)=\vec{b}\left(k+1\right);\vec{a}=\frac{k+1}{2-k}\vec{b}.$$

Обозначим $\frac{-1-k}{1-k}=d$, тогда $\vec{a}=d\vec{b}$, но это противоречит условию ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны). Значит наше предположение не верно, т.е. $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$ и $\vec{a}+\vec{b}$ не коллинеарны, ч.т.д.

в) Допустим, что $\vec{a}+\vec{b}$ и $\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$ коллинеарны. Тогда

$$\vec{a}+\vec{b}=k\left(\vec{a}+3\vec{b}\right);\ \vec{a}+\vec{b}=k\vec{a}+3k\vec{b};\vec{a}\left(1-k\right)=\vec{b}\left(3k+1\right);\vec{a}=\frac{3k+1}{1-k}\vec{b}.$$

Обозначим $\frac{-1-k}{1-k}=d$, тогда $\vec{a}=d\vec{b}$, но это противоречит условию ($\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны). Значит наше предположение не верно, т.е. $\vec{a}+\vec{b}$ и $\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)$ не коллинеарны, ч.т.д.