МГУ – ШКОЛЕ

Ю. А. Глазков И. И. Юдина
В. Ф. Бутузов

Геометрия

10

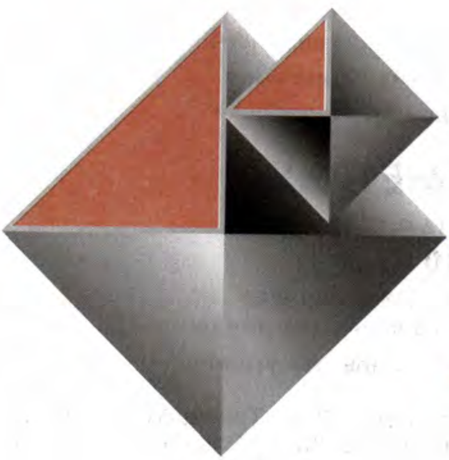
Рабочая тетрадь

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

МГУ – ШКОЛЕ

Ю. А. Глазков И. И. Юдина
В. Ф. Бутузов

Геометрия



Рабочая тетрадь

10 класс

Пособие для учащихся общеобразовательных организаций

Базовый и профильный уровни

7-е издание

Москва «Просвещение» 2013

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г52

Серия «МГУ — школе» основана в 1999 году

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 10—11» авторов Л. С. Атанасяна и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом.

Учебное издание

Серия «МГУ — школе»

Глазков Юрий Александрович
Юдина Ирина Игоревна
Бутузов Валентин Федорович

ГЕОМЕТРИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ
10 класс
Пособие для учащихся общеобразовательных организаций
Базовый и профильный уровни

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Л. В. Кузнецова*. Младший редактор *Е. А. Андреенкова*. Художники *Е. В. Соганова*, *О. П. Богомолова*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная верстка *О. С. Ивановой*. Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской*. Корректоры *О. Н. Леонова*, *А. В. Рудакова*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 16.04.13. Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 4,67. Доп. тираж 16 000 экз. Заказ № 1486.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, г. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография» Филиал «Чеховский Печатный Двор» 142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1 Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpk.ru, 8(495)988-63-87

ISBN 978-5-09-029650-2

Аксиомы стереометрии

A_1. *Через любые три точки, ______________________________ , проходит плоскость, и притом ______________________*

A_2. *Если две точки прямой лежат в плоскости, то ______________________________ лежат в этой плоскости.*

A_3. *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют ______________________________ , на которой лежат ______________________________ этих плоскостей.*

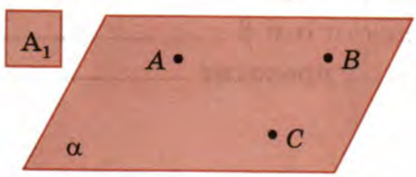


Рис. 1

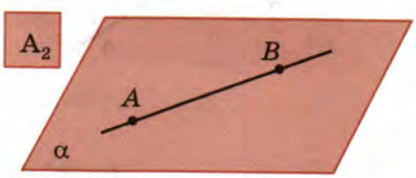


Рис. 2

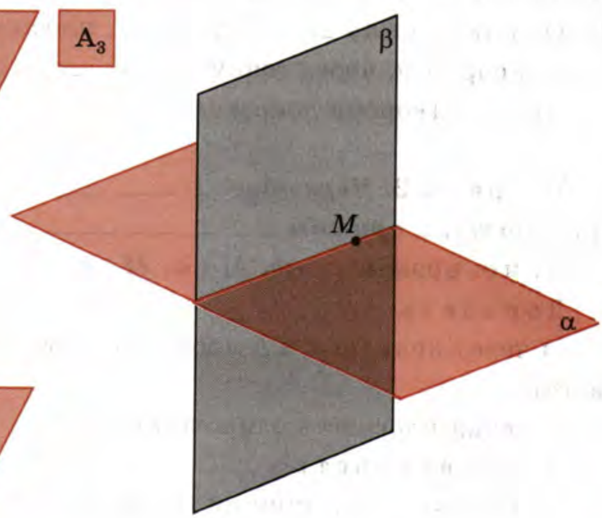


Рис. 3

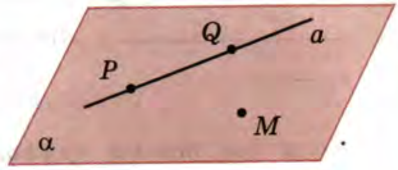
Вопрос. Три точки лежат в каждой из двух различных плоскостей. Можно ли утверждать, что эти точки лежат на одной прямой?

Ответ. Да. Так как каждая точка принадлежит обеим плоскостям, то эти плоскости по аксиоме ______ имеют ______________________________

Т е о р е м а 1. ***Через прямую и ______________________ точку проходит плоскость, и притом ______________***

Д а н о: прямая a, $M \notin a$.

Д о к а з а т ь:



а) через прямую a и точку M проходит плоскость;

б) такая плоскость единственная.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

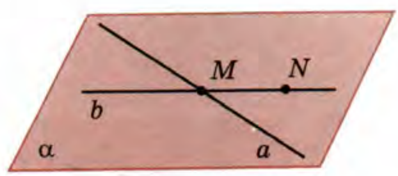
а) Пусть $P \in a$, $Q \in a$. Точки ________ не лежат на одной прямой, поэтому через эти точки по ____________ проходит некоторая плоскость α. Так как $P \in \alpha$ и $Q \in \alpha$, то прямая a лежит в плоскости α ____________ . Итак, плоскость α проходит через точку ____ и ____________

б) Допустим, что через прямую a и точку M проходит еще одна плоскость β. Тогда точки ________ будут лежать и ____________ . Следовательно, по ____________ плоскости α и β ____________ . Таким образом, через точку ____ и ________ проходит ____________ плоскость. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. ***Через две ____________________ прямые проходит плоскость, и притом ____________***

Д а н о: прямые a и b, $M \in a$, $M \in b$.

Д о к а з а т ь:



а) через прямые a и b проходит плоскость;

б) такая плоскость единственная.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

а) Пусть $N \in b$, причем N и M — ________________ точки, тогда по ______________ через прямую a и точку N проходит плоскость α. Так как две точки ___ и ___ прямой b лежат в плоскости α, то по ____________ прямая b ______________________________ . Итак, через прямые a и b проходит ______________

б) Допустим, что через прямые a и b проходит еще одна ____________ β. Тогда точка ___ и __________ лежат в этой плоскости, поэтому, согласно ______________ , плоскости α и β ____________ . Таким образом, через пересекающиеся прямые ____ и ____ проходит ______________ плоскость. Теорема доказана.

1

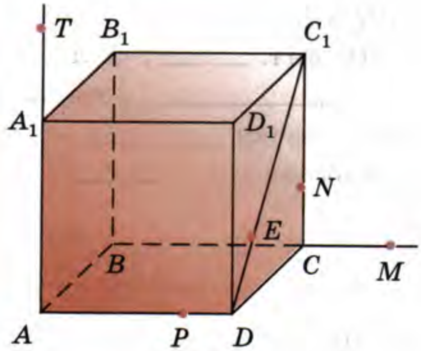
На рисунке изображен куб. Назовите:

а) плоскости, в которых лежат прямые NE, MN, TP, PM;

б) точки пересечения прямой MN с плоскостью DCC_1, прямой CE с плоскостью ABD, прямой PM с плоскостью BCC_1;

в) прямые, по которым пересекаются плоскости ABC и B_1C_1N, $A_1B_1C_1$ и CDE;

г) точки пересечения прямых AP и EC_1, DE и B_1C_1, AT и A_1D_1.



Ответ.

а) Прямая NE лежит в плоскости DCC_1, прямая MN лежит в плоскости ________ , прямая TP лежит в плоскости ________ , прямая PM лежит в плоскости ________

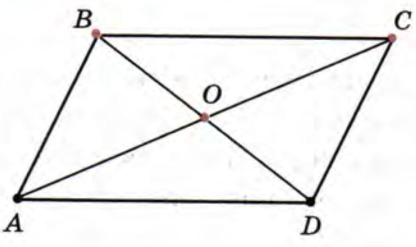
б) прямая MN пересекает плоскость DCC_1 в точке ___ , прямая CE пересекает плоскость ABD в точке ___ , прямая PM пересекает плоскость BCC_1 в точке ___

в) плоскости ABC и B_1C_1N пересекаются по прямой ____ , плоскости $A_1B_1C_1$ и CDE пересекаются по прямой ____

г) прямые AP и EC_1 пересекаются в точке ___ , прямые DE и B_1C_1 пересекаются в точке ___ , прямые AT и A_1D_1 пересекаются в точке ___

2

Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости α. Лежат ли две другие вершины параллелограмма в плоскости α? Ответ обоснуйте (задача 9 учебника).



Решение. Пусть смежные вершины B и C и точка O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α. Тогда по аксиоме ____ прямые ____ и ___ лежат в плоскости α, и так как $A \in CO$, $D \in BO$, то точки ________________________________

____

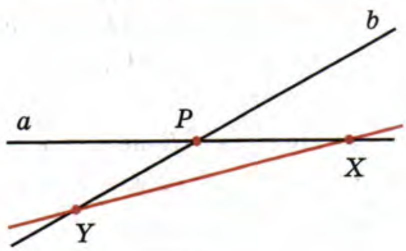
Ответ. ____

3

Точки M, N, P и Q не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые MQ и NP пересекаться?

Ответ. ______ . Если бы прямые MQ и NP пересекались, то, согласно ________________ , эти прямые лежали бы в ________ плоскости, а поэтому точки ______________ также лежали бы в этой плоскости, что противоречит ______________

4

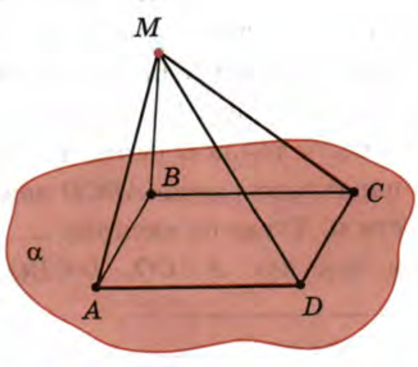


На рисунке прямые a и b пересекаются в точке P. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку P и пересекающие прямые a и b в каких-то точках X и Y, лежат в одной плоскости.

Доказательство. По ____________ через пересекающиеся прямые a и b проходит некоторая плоскость α, причем $X \in \alpha$ и $Y \in \alpha$, так как прямые a и b ______________________________ .

Поэтому, согласно ______________________ , прямая XY лежит в плоскости α. Итак, все рассматриваемые прямые лежат в ______________________________

5



На рисунке точки A, B, C и D лежат в плоскости α, а точка M не лежит в этой плоскости. Пересекаются ли плоскости, проходящие через точки A, B, M и D, C, M?

Ответ. ____ . Плоскости ABM и DCM имеют общую ____________________ , а потому, согласно ____________________ , они имеют ____________________ , т. е. ____________________

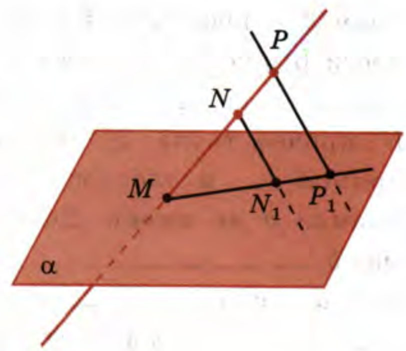
Глава I

Параллельность прямых и плоскостей

§ 1 Параллельность прямых, прямой и плоскости

6

На рисунке прямая PM пересекает плоскость α в точке M, $N \in PM$, причем $MN : NP = 2 : 1$, $PP_1 \parallel NN_1$, $NN_1 = 14$ см, P_1 и N_1 — точки пересечения параллельных прямых с плоскостью α.



а) Докажите, что точки M, N_1 и P_1 лежат на одной прямой.

б) Найдите длину отрезка PP_1.

Решение.

а) Прямые NN_1 и PP_1 задают некоторую плоскость, так как параллельные прямые ______________________________ ______________________________ . Обозначим эту плоскость буквой β. Тогда по аксиоме ____ прямая NP лежит __________________ и поэтому $M \in \beta$, так как __________ . Плоскости α и β имеют общую точку M, а потому, согласно ________________, пересекаются по прямой, на которой лежат все общие точки ______________________ . Точки M, N_1 и P_1 — общие точки ______________________ , следовательно, они лежат на одной ______

б) $\triangle MNN_1 \sim \triangle MPP_1$, так как _____________ , поэтому $\dfrac{MN}{MP} = $ _____ ,

т. е. $\dfrac{2}{\_\_} = \dfrac{\_\_}{PP_1}$, откуда $PP_1 =$ ___________

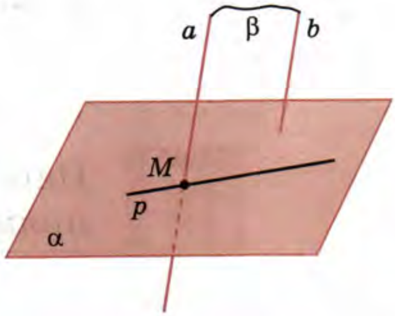
Ответ.

б) ___________

Лемма. ***Если одна из двух ____________________ прямых пересекает данную плоскость, то и ______________________________ ______________ эту плоскость.***

Дано: $a \parallel b$, M — точка пересечения прямой a и плоскости α.

Доказать: прямая b ______________ __________________



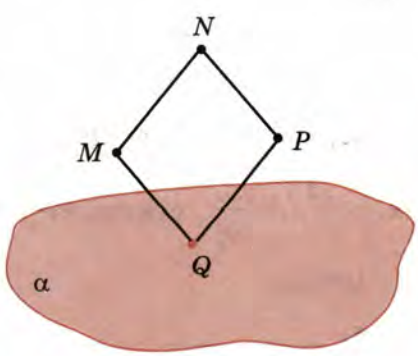
Доказательство. Пусть β — плоскость, в которой лежат параллельные прямые a и b. Так как $M \in \alpha$, $M \in \beta$, то __________________________ плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой p, проходящей через _______________ . Таким образом, в плоскости β прямая p пересекает прямую a в точке ____ , а потому она ______________ и параллельную ей _______________ в некоторой точке N, причем точка $N \in \alpha$, так как ________ . Итак, N — общая точка прямой ___ и плоскости ___ . Других общих точек с плоскостью α прямая b не имеет. Действительно, если предположить, что прямая b ______________________________ еще одну ___________________ , то, согласно _________________ , прямая b будет целиком лежать в ______________ , а значит, будет общей прямой ______________________ и потому совпадет _______________ . Но это невозможно, так как по условию $a \parallel b$, а прямые a и p __________________ . Лемма доказана.

7

Вершина Q параллелограмма $MNPQ$ лежит в плоскости α, а точки M, N и P не лежат в этой плоскости. Докажите, что прямые NM и NP пересекают плоскость α.

Доказательство. Прямая PQ пересекает плоскость α в точке Q, так как $Q \in \alpha$, поэтому, согласно лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми, прямая NM, параллельная _____ , также __________________________________ .

Прямая MQ пересекает ______________ ______________ , поэтому ______________ прямая NP ________________________ __________ , что и требовалось доказать.



Теорема (о трех параллельных прямых). ***Если две прямые параллельны третьей, то они*** ______________________________

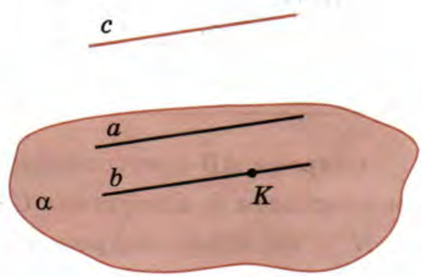
Дано: $a \parallel c$, $b \parallel c$.

Доказать: ______

Доказательство. Нужно доказать, что прямые a и b:

1) лежат в одной ______________________

2) не ______________________________________



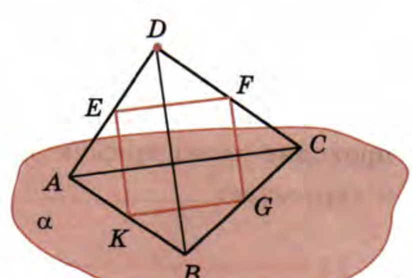
1) Пусть K — какая-нибудь точка на прямой b. Плоскость, проходящую через прямую a и точку K, обозначим буквой α. Прямая b лежит в плоскости α, так как если предположить, что она пересекает плоскость α, то, согласно лемме ____, прямая c также будет пересекать плоскость α. Но $a \parallel c$, поэтому и прямая a будет ____, что невозможно, так как прямая a лежит в ________________________ . Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости.

2) Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы ______________________________________, параллельные ____________________, что невозможно. Итак, $a \parallel b$.

Теорема доказана.

8

Точка D не лежит в плоскости ABC, точки E, F, G и K — середины отрезков AD, DC, BC и AB.



а) Докажите, что точки E, F, G и K лежат в одной плоскости.

б) Найдите периметр четырехугольника $EFGK$, если $AC = 18$ см, $BD = 24$ см.

Решение. а) EF — средняя линия треугольника ______________, поэтому $EF \parallel$ ______ и $EF =$ ________; KG — средняя ____ и потому ______________________________ .

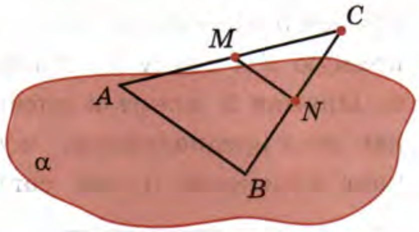
Следовательно, $EF \parallel$ ______ , т. е. точки E, F, G и K лежат на параллельных прямых, а значит, лежат в одной ______________

б) Четырехугольник $EFGK$ — параллелограмм, так как ________ ____________ , причем $EF =$ ______________ , $EK =$ ______________ , а потому $P_{EFGK} =$ ______________________________

Ответ. б) ________

9

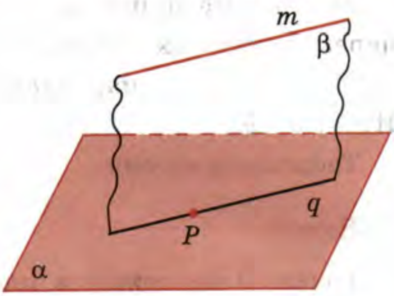
Сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина $C \notin \alpha$, точки M и N — середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая $MN \parallel \alpha$.



Доказательство. Так как MN — средняя линия ______________ , то $MN \parallel AB$, а потому, согласно ____________ ____ ______________ , $MN \parallel \alpha$.

10

На рисунке $m \parallel \alpha$, $P \in \alpha$. Докажите, что в плоскости α существует прямая, проходящая через точку P и параллельная прямой m.



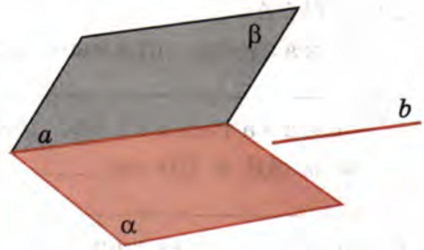
Доказательство. Прямая m и не лежащая ________ точка P задают некоторую ______________ β. Так как $P \in \alpha$ и $P \in \beta$, то, согласно ______________ , плоскости α и β ____________________ по некоторой прямой q, проходящей через ______________ . Докажем, что q — искомая прямая. Плоскость β проходит через прямую m, параллельную ______________ , и пересекает ______________ по прямой q, следовательно, ________

11

Докажите, что если данная прямая параллельна прямой, по которой пересекаются две плоскости, и не лежит в этих плоскостях, то она параллельна этим плоскостям (задача 25 учебника).

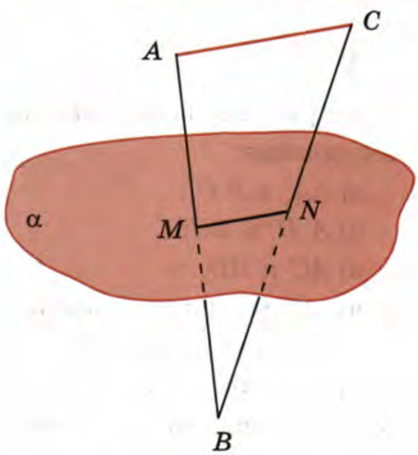
Доказательство. На рисунке плоскости α и β пересекаются по прямой a и $b \parallel a$. Докажем, что $b \parallel \alpha$ и $b \parallel \beta$. Прямая a лежит в плоскости α, а $b \parallel a$, следовательно, $b \parallel \alpha$ по ____ ____________________. Аналогично, прямая a лежит ____________________ и __________, поэтому ________

Итак, прямая b параллельна обеим пересекающимся плоскостям ____ и ____



12

Сторона AC треугольника ABC параллельна плоскости α, а стороны AB и BC пересекаются с этой плоскостью в точках M и N. Докажите, что треугольники ABC и MBN подобны (задача 26 учебника).



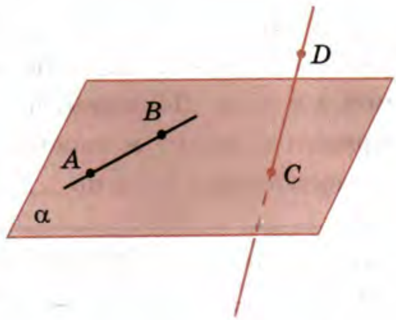
Доказательство. На рисунке плоскость ABC проходит через прямую ____, параллельную плоскости α, и пересекает ее по ____________________, следовательно, __________, а потому ______________________________

§ 2 Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми

Теорема (признак скрещивающихся прямых). ***Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая ____ в точке, ________________ ____, то эти прямые скрещивающиеся.***

Д а н о: прямая AB лежит в плоскости α, прямая CD пересекает плоскость α, $C \in \alpha$, $C \notin AB$.

Д о к а з а т ь: прямые AB и CD — ______________________



Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что прямые AB и CD не ______________________ . Тогда они будут лежать в некоторой ______________ β. Так как в этой плоскости будут лежать прямая AB и точка C, то плоскость β совпадает с ______________ , а значит, прямая CD ______________________________ , что противоречит ______________ . Теорема доказана.

13

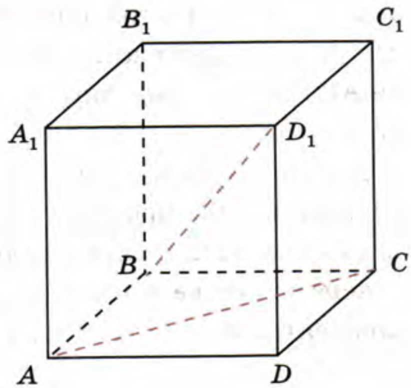
На рисунке изображен куб. Докажите, что прямые:

а) AA_1 и B_1C_1;

б) A_1D_1 и DC;

в) AC и BD_1 —

являются скрещивающимися.



Д о к а з а т е л ь с т в о.

а) Прямая B_1C_1 лежит в плоскости $B_1C_1D_1$, а прямая AA_1 пересекает эту плоскость ______________ , причем $A_1 \notin B_1C_1$, так как ______________ , поэтому, согласно ______________________ ______________ , прямые AA_1 и B_1C_1 являются ______________

б) ____

____

____

____

в) ____

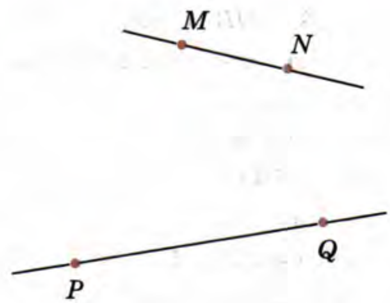
____

____

____

14

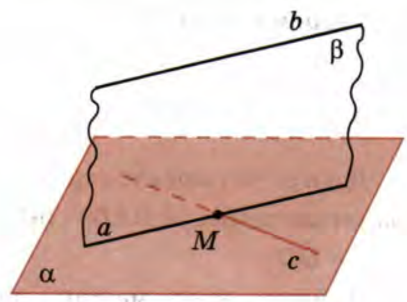
Прямые MN и PQ скрещивающиеся. Докажите, что прямые MQ и NP также скрещивающиеся.



Доказательство. Допустим, что прямые MQ и NP не ______________________________. Тогда они лежат в некоторой плоскости β. Так как $M \in \beta$, $N \in \beta$ и $P \in \beta$, $Q \in \beta$, то, согласно ______________, прямые ______________ также будут ______________________. Но это противоречит условию. Значит, прямые MQ и NP ______________________

15

Прямая c пересекает прямую a и не пересекает прямую b, параллельную прямой a. Докажите, что b и c — скрещивающиеся прямые (задача 36 учебника).

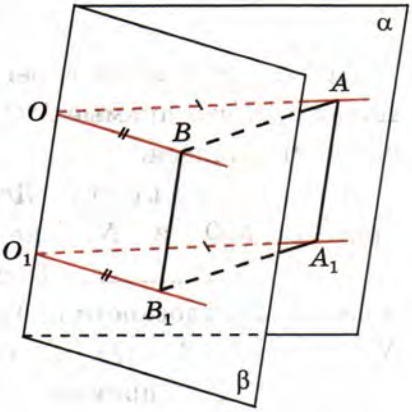


Доказательство. Пусть прямые a и c пересекаются в точке M. Прямые a и b лежат в некоторой ______________ β, так как ______________. $M \in a$, поэтому $M \in \beta$, но $M \notin b$, так как ________. Прямая c не лежит в плоскости β, так как в противном случае она пересекала бы ______________, а по условию ______________________________

Итак, прямая b лежит в плоскости β, а прямая c пересекает ______________________ в точке $M \notin b$, поэтому, согласно ______________ ____, прямые b и c — ______________________________

Теорема. ***Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы*** ____________

Дано: углы O и O_1 с соответственно сонаправленными сторонами.
Доказать: $\angle O = \angle O_1$.

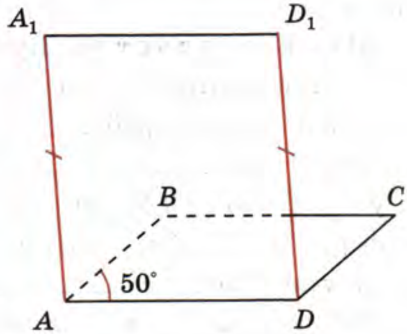


Доказательство. На сторонах углов O и O_1 отложим равные отрезки OA и O_1A_1, OB и O_1B_1. Четырехугольник OO_1A_1A — параллелограмм, так как ______________________, поэтому $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 =$ ______ . Четырехугольник OBB_1O_1 — ______________________, так как ______________________, поэтому $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 =$ ______

Итак, $AA_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 \parallel OO_1$, следовательно, по теореме ______________________ $AA_1 \parallel$ ______ .
Кроме того, $AA_1 = BB_1$, так как ______________________, поэтому четырехугольник ABB_1A_1 — ______________________, и значит, $AB =$ ______ . Таким образом, $\triangle AOB =$ ______ по ______________ , поэтому $\angle O = \angle O_1$.

Теорема доказана.

16



Дано: четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BAD = 50°$, $AA_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = DD_1$.

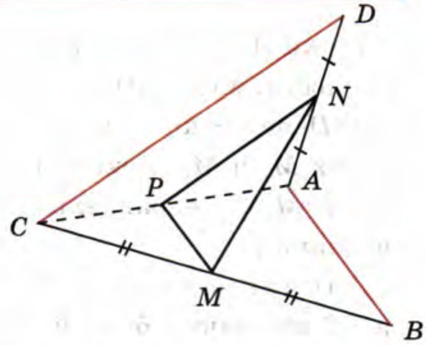
Найдите угол между прямыми A_1D_1 и CD.

Решение. Прямые A_1D_1 и CD скрещивающиеся, так как прямая A_1D_1 лежит в плоскости ______ , а прямая CD пересекает эту плоскость в ______________ , не лежащей ______________________ .
По условию $AA_1 \parallel DD_1$ и $AA_1 = DD_1$, поэтому четырехугольник ADD_1A_1 — ______________________ и, следовательно, $AD \parallel A_1D_1$. Кроме того, $AB \parallel CD$, так как ______________________ . Таким образом, через точку A проходят прямые AD и AB, соответственно ______________________ скрещивающимся ______________________

Так как $\angle BAD = 50°$, то, согласно определению, угол между скрещивающимися ______________________ равен ______

Ответ. ______

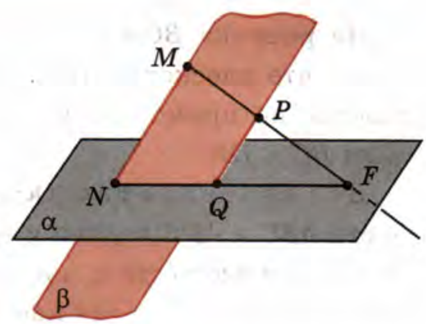
17



В пространственном четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$. Докажите, что прямые AB и CD образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков BC и AD (задача 47 учебника).

Доказательство. Середины отрезков BC, AD и AC обозначим буквами M, N и P. Так как отрезок MP — средняя ________________________, то $MP \parallel$ ______, и поэтому угол между прямыми AB и MN равен углу ______. Кроме того, $PM = \frac{1}{2}$ ______. Аналогично отрезок PN — ________________________, и поэтому $PN \parallel$ ______ и $PN =$ ______, а угол между прямыми CD и MN равен ______. Так как $AB = CD$ ______________, то $PM =$ ______, т. е. треугольник PMN — ______________. Следовательно, $\angle$ ______ $=$ $= \angle$ ______, а это означает, что угол между прямыми AB и MN равен углу между прямыми ______________, что и требовалось доказать.

18



Дано: $MN \parallel PQ$, $N \in \alpha$, $Q \in \alpha$, $MN =$ $= 10$ см, $PQ = 6$ см, $NQ = 4$ см.

а) Докажите, что прямая MP пересекает плоскость α в некоторой точке F.

б) Найдите отрезок QF.

Решение.

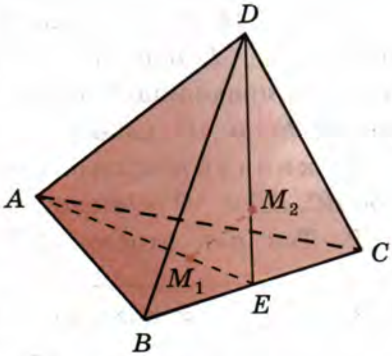
а) Прямые MN и PQ лежат в некоторой плоскости β, так как ______________. Прямые MP и NQ не параллельны, так как в противном случае четырехугольник $MNQP$ был бы ______________ и поэтому выполнялось бы равенство $MN =$ ______, что противоречит ______________, следовательно, прямая MP пересекает прямую NQ в некоторой точке F. Так как NQ — линия пересечения плоскостей ______________, то $F \in \alpha$, и, значит, прямая MP ____.

б) Так как $PQ \parallel MN$, то $\triangle PQF \sim$ ______________. Следовательно, $\frac{QF}{NF} = \frac{PQ}{\_\_\_}$, т. е. $\frac{\_\_\_}{QF+4} = \frac{6}{10}$, откуда $QF =$ ____ см.

Ответ. б) $QF =$ ____ см.

19

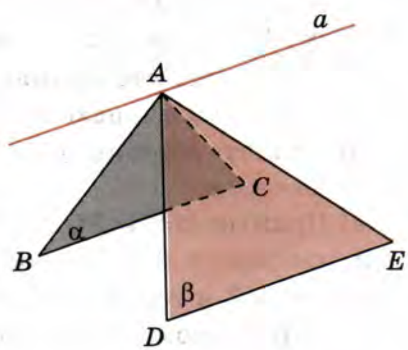
Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости. Медианы треугольников ABC и CBD пересекаются соответственно в точках M_1 и M_2. Докажите, что отрезки AD и M_1M_2 параллельны (задача 89 учебника).



Доказательство. Середину отрезка BC обозначим буквой E. Отрезки AE и DE — ________________ треугольников ________ и ________, поэтому точки M_1 и M_2 лежат на ______________________ и делят их в отношении ______, считая от точки E. Отсюда следует, что $\frac{EM_1}{EA} = \frac{EM_2}{\_\_\_} = \_\_\_$. Таким образом, стороны EM_1 и EM_2 треугольника EM_1M_2 пропорциональны ____, а угол E у этих треугольников — ______________________. Поэтому __________________ и, следовательно, _________________

20

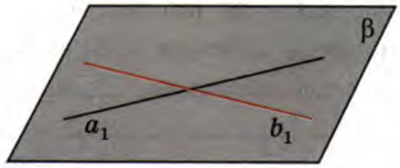
На рисунке $BC \parallel DE$, $A \notin BCD$. Докажите, что плоскости ABC и ADE пересекаются по прямой, параллельной прямым BC и DE.



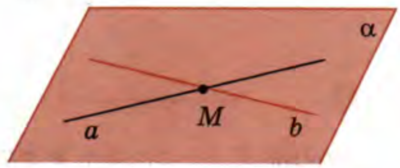
Доказательство. Обозначим плоскости ABC и ADE через α и β. Прямая DE не лежит в плоскости α, а прямая BC не лежит ______________, так как в противном случае эти плоскости совпали бы и тогда точка A лежала бы в плоскости BCD, что ____________________________________. Плоскости α и β имеют общую точку A и поэтому, согласно ________________, имеют ____________________, т. е. пересекаются по некоторой ___________ a. По условию $DE \parallel BC$ и так как DE не лежит в ____________________, то по признаку ____ $DE \parallel \alpha$.

Итак, плоскость β проходит через прямую DE, параллельную плоскости _____, и пересекает ее по _____________. Следовательно, ________, а так как $DE \parallel BC$, то ________

§ 3 Параллельность плоскостей



Теорема (признак параллельности двух плоскостей). ***Если две пересекающиеся прямые одной плоскости*** ________________________ ***двум прямым другой плоскости, то эти плоскости*** ________________



Дано: прямые a и b, пересекающиеся в точке M, лежат в плоскости α, прямые a_1 и b_1 лежат в плоскости β, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$.

Доказать: $\alpha \parallel \beta$.

Доказательство. Заметим, что $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$ по признаку ____. Теперь допустим, что плоскости α и β не ____________________, а пересекаются по ________________________ c. Тогда плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости ____, и пересекает плоскость β по прямой c. Следовательно, $a \parallel c$. Но плоскость α проходит и ____, следовательно, $b \parallel c$. Таким образом, через точку M проходят две прямые ________, параллельные прямой ____. Но это невозможно, так как по ____ через точку M ____. Значит, наше допущение неверно и $\alpha \parallel \beta$.

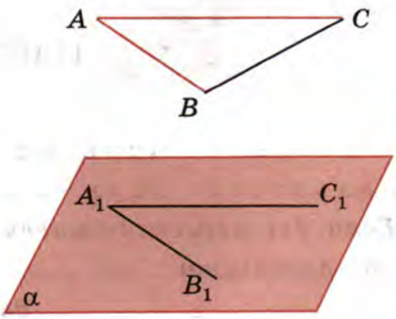
Теорема доказана.

21

Две стороны треугольника параллельны плоскости α. Докажите, что и третья сторона параллельна плоскости α (задача 52 учебника).

Доказательство. Пусть стороны AB и AC треугольника ABC параллельны плоскости α. Докажем, что и третья сторона BC параллельна плоскости α. Так как $AB \parallel \alpha$, то, согласно заданию 10, в плоскости

α существует некоторая прямая $A_1B_1 \parallel AB$. Аналогично существует прямая A_1C_1 плоскости α, параллельная прямой AC. Итак, две пересекающиеся прямые AB и AC плоскости ABC параллельны двум прямым A_1B_1 и A_1C_1 плоскости α, следовательно, ____, эти плоскости ______________________, а потому прямая BC ______________________ плоскости α.

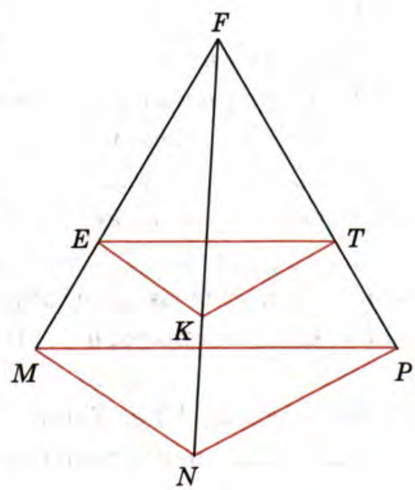


22

Точка F не лежит в плоскости треугольника MNP, точки E, K и T лежат на отрезках FM, FN и FP, причем $\frac{FE}{FM} = \frac{FK}{FN} = \frac{FT}{FP} = \frac{2}{3}$.

а) Докажите, что плоскости EKT и MNP параллельны.

б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника EKT равна 36 см^2.



Решение.

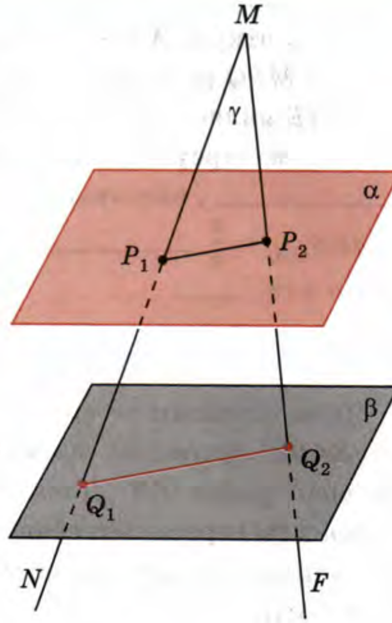
а) $\triangle EFK \sim$ ________, так как ____,
поэтому $EK \parallel$ _____ и $EK =$ ________.
Аналогично $\triangle KFT \sim$ ________, так как ______________________________, поэтому $KT \parallel$ _____ и $KT =$ ________

Итак, пересекающиеся прямые EK и KT плоскости EKT соответственно ______________________________ плоскости MNP, следовательно, эти плоскости ______________________

б) $\triangle EKT \sim$ ________, так как ____, и коэффициент подобия k равен _____. Поэтому $S_{EKT} : S_{MNP} =$ ____ $=$ _____, откуда $S_{MNP} =$ ____________ $=$ ____________

Ответ. б) ____________

23



На рисунке параллельные плоскости α и β пересечены прямыми MN и MF, P_1, P_2 и Q_1, Q_2 — точки пересечения прямых с плоскостями α и β. Найдите P_1P_2, если $MP_1 : MQ_1 = 3 : 4$ и $Q_1Q_2 = 72$ см.

Решение.

1) Пересекающиеся прямые MN и MF задают некоторую ______________ γ. P_1 и P_2 — общие точки плоскостей α и γ, поэтому прямая P_1P_2 — ______________ ______________, аналогично Q_1 и Q_2 — ______________________________, поэтому прямая Q_1Q_2 — ______________

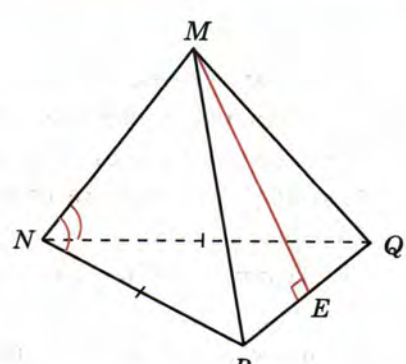
Итак, параллельные плоскости α и β пересечены плоскостью γ, поэтому, согласно ______________________________ ______________________________, линии их пересечения ______________________, т. е. $P_1P_2 \parallel$ __________

2) $\triangle P_1MP_2 \sim$ __________, так как ______________, следовательно, $MP_1 : MQ_1 = P_1P_2 :$ __________, $P_1P_2 =$ __________ $=$ __________

Ответ. __________

§ 4 Тетраэдр и параллелепипед

24



В тетраэдре $MNPQ$ ребро $MN = 3\sqrt{2}$ см, $NP = NQ = 7$ см, $PQ = 8$ см, $\angle MNP = \angle MNQ = 45°$. Найдите площадь грани MPQ.

Решение.

1) $\triangle MNP = \triangle MNQ$, так как ______________________________ ______________________________, поэтому $MP =$ = ______

2) По теореме косинусов для треугольника MNP имеем: $MP^2 =$ $=$ ______________________________ $=$ ______________________ $=$ $=$ _____ , откуда $MP =$ ___ см.

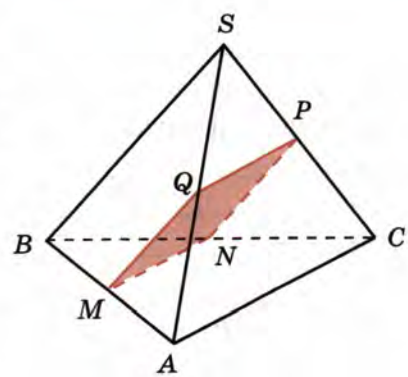
3) $\triangle MPQ$ равнобедренный, так как ____________ , а потому его высота ME является ______________ , т. е. $PE =$ ____ см. Итак, в прямоугольном треугольнике MEP гипотенуза ____________ , катет ____________ , следовательно, $ME =$ _____ см.

4) $S_{MPQ} = \frac{1}{2}$ ______________ $= \frac{1}{2}$ ______ см^2 $=$ _____ см^2.

Ответ. _____

25

Через середины ребер AB и BC тетраэдра $SABC$ проведена плоскость, параллельная ребру SB. Докажите, что эта плоскость пересекает грани SAB и SBC по параллельным прямым (задача 69 учебника).



Доказательство. Пусть MNQ — плоскость, проходящая через середины M и N ребер AB и BC и параллельная ребру SB. Плоскость SAB проходит через прямую SB, параллельную плоскости _______ , и пересекает ее по прямой MQ, поэтому MQ ______ . Аналогично плоскость SBC проходит

____

и пересекает ______________________________ , поэтому ________ . Итак, $MQ \parallel SB$ и _______ , поэтому _______ , что и требовалось доказать.

26

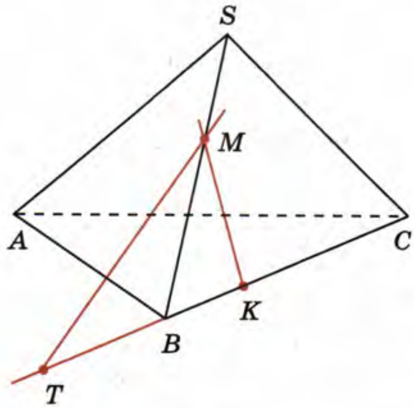
В тетраэдре $SABC$ точки M и K лежат на ребрах SB и BC, а точка T — на продолжении ребра BC. Постройте:

а) точку пересечения прямых MK и SC;

б) точку пересечения прямой TM и плоскости ASC.

Решение.

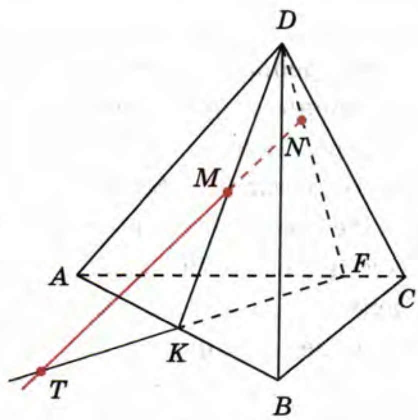
а) Прямая MK лежит в плоскости SBC, так как точки ____ , причем на рисунке прямые MK и SC не параллельны, поэтому прямая MK пересекает прямую SC в некоторой точке _____ . Итак, _____ — точка пересечения прямых MK и SC.



б) Прямая TM лежит в плоскости BSC, так как точки ____. На рисунке прямые TM и SC не параллельны, поэтому прямая TM пересекает прямую SC в некоторой точке _____ , а так как прямая SC лежит в плоскости ASC, то и точка _____ $\in ASC$. Следовательно, прямая TM пересекает плоскость ASC в точке _____

27

Точки M и N расположены на гранях ADB и ADC тетраэдра $DABC$. Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью ABC.



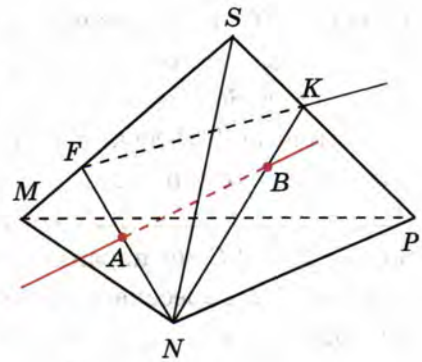
Решение. Поскольку точки D и M лежат в плоскости ADB, то прямая DM ____ и пересекает ребро ____

Аналогично прямая DN пересекает ____. Точки F и K лежат в плоскости DMN, а потому и ____________________________ лежит в ____________________________. Так как на рисунке прямая MN не параллельна прямой FK, то прямая MN пересекает прямую ______ в некоторой точке T. Прямая FK лежит в плоскости ABC, поэтому точка _________________ и, значит, прямая MN пересекает плоскость ______ в точке _____

28

Точки A и B расположены на гранях SMN и SNP тетраэдра $SMNP$. Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью SMP.

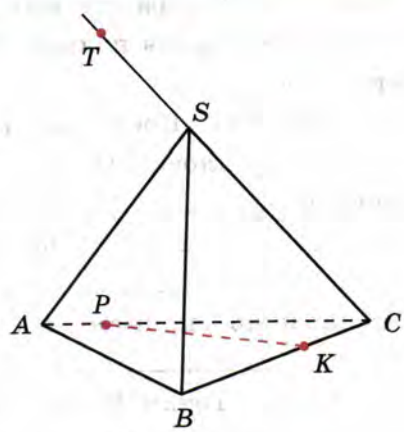
Р е ш е н и е. Поскольку точки N и A лежат в плоскости SMN, то прямая NA ____ и пересекает ______________________________ ________________ . Аналогично прямая NB ____ ____ .



Итак, точки ________ лежат в плоскости ANB, а потому и ______________ лежит в этой плоскости. На рисунке прямые AB и FK не параллельны, следовательно, прямая AB пересекает прямую ______ в некоторой точке _____ , и так как прямая FK лежит в плоскости SMP, то и точка ___________ , а значит, прямая AB пересекает плоскость __________ в точке _____

29

На ребрах AC и BC тетраэдра $SABC$ отмечены точки P и K, а на продолжении ребра SC — точка T. Постройте сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью PKT.



Р е ш е н и е. Поскольку точки T и P лежат в плоскости _________ , то прямая TP лежит _____________________________ и пересекает ребро ______ в некоторой ______________ . Аналогично прямая TK лежит в плоскости ________ и пересекает ребро ____________________________________ . Следовательно, сечением тетраэдра $SABC$ плоскостью PKT является ____

Проведите указанные прямые и постройте искомое сечение.

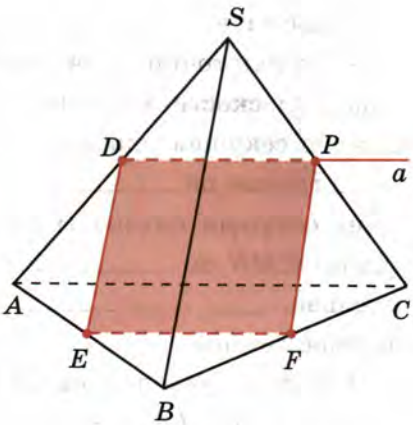
30

В тетраэдре $SABC$ точки D, E и F являются серединами ребер SA, AB и BC, $AC = 32$ см, $SB = 40$ см, угол между прямыми AC и SB равен $90°$.

а) Докажите, что плоскость DEF проходит через середину P ребра SC.

б) Найдите площадь четырехугольника $DEFP$.

Р е ш е н и е.



а) EF — средняя линия треугольника ________ , поэтому $EF \parallel$ ________ , и по признаку ____ $EF \parallel ASC$.

Плоскости ASC и DEF имеют общую точку D и потому, согласно ________________ , имеют общую прямую, проходящую через точку ___ . Обозначим эту прямую буквой a. Так как плоскость DEF проходит через прямую EF, параллельную плоскости ________ , и пересекает эту плоскость по прямой ____ , то $a \parallel$ ______ . Мы получили, что $AC \parallel EF$ и $a \parallel EF$, откуда следует по ____ , что $a \parallel AC$.

Рассмотрим $\triangle ASC$. Точка D — середина стороны ______ , прямая a, проходящая через точку D, параллельна ______ , следовательно, прямая a пересекает сторону SC в точке P — середине ______ . Тем самым мы доказали, что плоскость DEF проходит через середину P ребра ______

б) Четырехугольник $DEFP$ — параллелограмм, так как ________________________________ , причем $EF =$ ________ , а $DE =$ $=$ ________________ , так как DE — средняя ________________________________

Рассмотрим угол DEF. Его стороны ED и EF соответственно параллельны прямым BS и AC, угол между которыми по условию равен 90°. Поэтому и $\angle DEF =$ ______ , и, значит, параллелограмм $DEFP$ является ________________________

$S_{DEFP} = DE \cdot$ ______ $=$ ____________ см^2 $=$ ________ см^2.

О т в е т. б) ____________

31

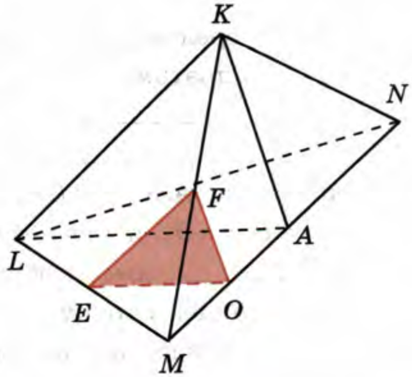
На рисунке изображен тетраэдр $KLMN$.

а) Постройте сечение этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро KL и середину A ребра MN.

б) Докажите, что плоскость, проходящая через середины E, O и F отрезков LM, MA и MK, параллельна плоскости LKA. Найдите площадь треугольника EOF, если площадь треугольника LKA равна 24 см^2 (задача 75 учебника).

Решение.

а) Так как точки L и A принадлежат секущей плоскости и грани ______ тетраэдра, то секущая плоскость пересекается с этой гранью по ______________ . Аналогично секущая плоскость пересекается с гранью KMN по ______________ . Следовательно, ________________________ — искомое сечение.



б) Рассмотрим плоскости EFO и LKA. $EF \parallel LK$ и $EO \parallel LA$, так как ____ .

Итак, две пересекающиеся прямые плоскости EFO соответственно параллельны двум прямым плоскости ______ , поэтому, согласно ____ , плоскости EFO и ________________________________ . Треугольники EOF и LAK подобны, так как ________________________ ____ ,

причем коэффициент подобия равен ____ , так как ______________ . По теореме об отношении площадей подобных треугольников имеем: $S_{EOF} : S_{LAK} =$ ____ , откуда $S_{EOF} =$ ______________ = ______________ см^2 = = ____ см^2.

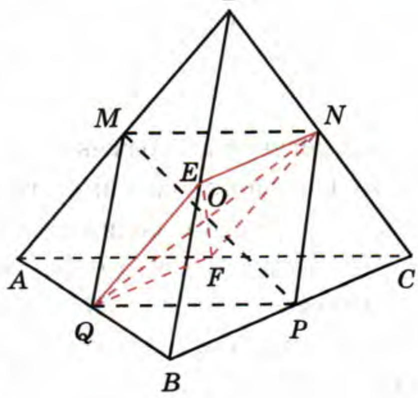
Ответ. б) ____ см^2.

32

Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются и точкой пересечения делятся пополам (задача 101 учебника).

Доказательство.

1) Пусть M, N, P и Q — середины ребер DA, DC, BC и AB тетраэдра $DABC$. Тогда отрезки MQ и NP — средние ________________________________ , и поэтому $MQ \parallel$ ____ и $MQ =$ ______ , $NP \parallel$ ____ и $NP =$ ____ . Следовательно,



$MQ \parallel$ _____ и $MQ =$ _____, и, значит, четырехугольник $MNPQ$ — ____________________________________, а отрезки MP и NQ — его ____________________. Отсюда следует, что отрезки MP и NQ, соединяющие середины противоположных ребер _____ и _____, _____ и _____ тетраэдра $DABC$, пересекаются и точкой пересечения O делятся пополам.

2) Теперь рассмотрим отрезки NQ и EF, соединяющие середины противоположных ребер CD и AB, BD и AC. Как и в п. 1, можно доказать, что четырехугольник $ENFQ$ — ____________________ и, следовательно, его диагонали EF и NQ пересекаются ______________________________, т. е. в точке _____

Итак, точка O является серединой отрезков MP, NQ и EF, что и требовалось доказать.

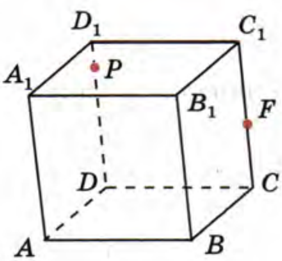
33

На ребрах DD_1 и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены точки P и F. Постройте точку пересечения:

а) прямой PF с плоскостью ABC;

б) прямой BF с плоскостью $A_1B_1C_1$.

Решение.



а) Поскольку точки P и F лежат в плоскости DD_1C_1, то прямая PF ______________________________, и так как на рисунке прямые PF и DC не параллельны, то прямая PF пересекает прямую _____, а значит, и ____________________ в некоторой ____________

б) Поскольку точки B и F лежат в ____________________, то прямая ______________________________. Прямые BC и B_1C_1 также лежат в ____________________, причем эти прямые ____________________ и прямая BF пересекает прямую _____ в точке _____. Поэтому прямая BF ______________________________ ______________________________.

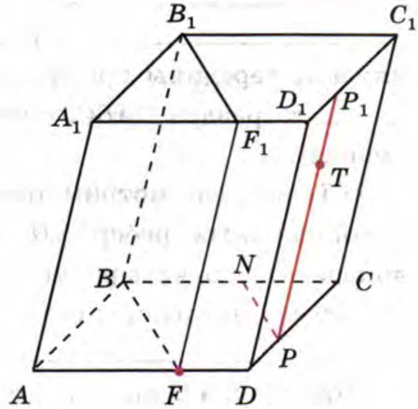
А так как прямая B_1C_1 лежит в плоскости $A_1B_1C_1$, то и точка ____ лежит в этой плоскости. Следовательно, прямая BF пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ в точке ____

34

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка F лежит на ребре AD, T — внутренняя точка грани CC_1D_1D.

а) Через точку T проведите плоскость α, параллельную плоскости B_1BF.

б) Постройте линию пересечения плоскости α с плоскостью AA_1D_1.



Решение.

а) Проведем $PT \parallel$ ______ и $PN \parallel$ ______. Прямые PT и PN задают ______

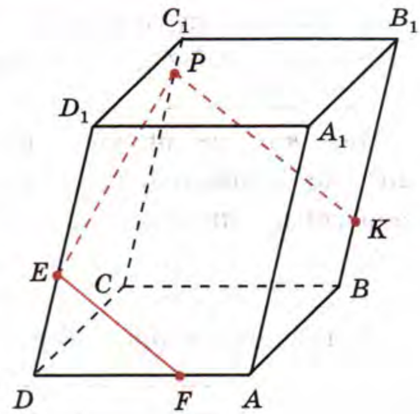
______

б) Прямая NP — линия пересечения плоскостей α и ______, причем прямая NP пересекает прямую AD в некоторой точке Q, и так как прямая AD лежит в плоскости AA_1D_1, то точка Q является общей точкой двух плоскостей α и AA_1D_1. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой QQ_1, проходящей через точку Q и параллельной прямой ______

Итак, QQ_1 — линия пересечения плоскостей ______ и ______

35

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки F, P и E лежат на ребрах AD, CC_1 и DD_1. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью FPE.



Решение. Грани ADD_1A_1 и CDD_1C_1 пересекаются с плоскостью FPE по отрезкам ______ и ______. Плоскость FPE пересекает грань CC_1B_1B по отрезку PK прямой, проходящей через точку P и параллельной прямой ______ грани AA_1D_1D, так как грани ______ параллельны. На рисунке прямая PK пересекает ребро BB_1 в некоторой точке ______. Аналогично плоскость FPE пересекает грань AA_1B_1B по отрезку прямой, проходящей через точку ______ и параллельной прямой ______ грани ______, а ребро AB в некоторой ______

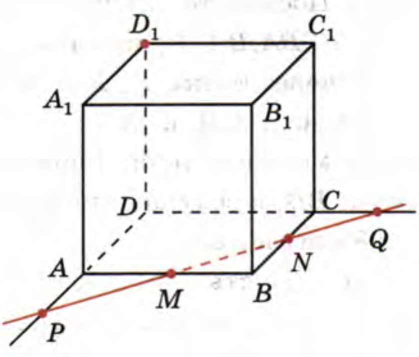
Итак, пятиугольник FEP______ — искомое сечение.

36

В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах AB и BC отмечены точки M и N.

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью D_1MN.

б) Постройте линию пересечения секущей плоскости и плоскости BD_1B_1.



Решение.

а) Пусть прямая MN пересекает продолжения ребер AD и DC в точках P и Q. Тогда прямые PD_1 и QD_1 пересекают ребра __________ в некоторых точках ______

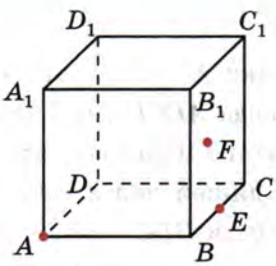
Итак, искомое сечение — ____

б) Плоскости D_1MN и BDD_1 имеют общую точку _____ , а потому по аксиоме _____ пересекаются. ____

37

а) Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью AEF, где точка E принадлежит ребру BC, а F — внутренняя точка грани DCC_1D_1.

б) Укажите точку пересечения диагонали DB_1 параллелепипеда с секущей плоскостью.



Решение.

а) Пусть прямая AE пересекает продолжение ребра _____ в некоторой точке ____ , тогда прямая _____ лежит в плоскости ________ и пересекает ребра ____________ в некоторых точках ____________

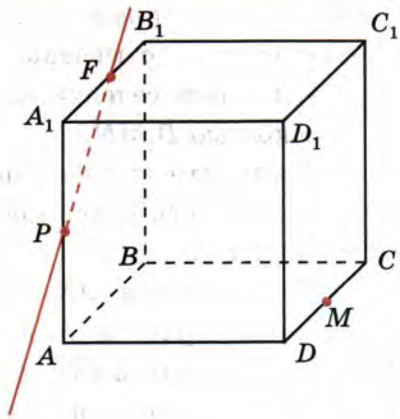
Итак, искомое сечение — ____

б) Пусть прямые BD и AE пересекаются в некоторой точке P. Тогда прямые _____ и _____ лежат в плоскости DBB_1 и ____

38

а) Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки P, F и M — середины ребер AA_1, A_1B_1 и DC.

б) Укажите точку пересечения диагонали BD_1 с секущей плоскостью.



Решение.

а) Пусть прямая FP пересекает ______________________________

____

____

____

____

____

____

____

Итак, искомое сечение — ______________________________

б) ______________________________

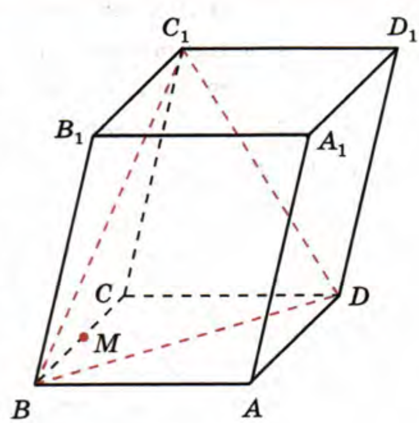
____

____

____

39

Точка M лежит на ребре BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку M параллельно плоскости BDC_1 (задача 115 учебника).



Решение. В плоскости BB_1C_1 через точку M проведем прямую ME, параллельную ______, $E \in CC_1$, а в плоскости ABC через __________ проведем прямую, ______________________________ и пересекающую _____ в точке F. Плоскость MEF параллельна плоскости __________ по ______________________________

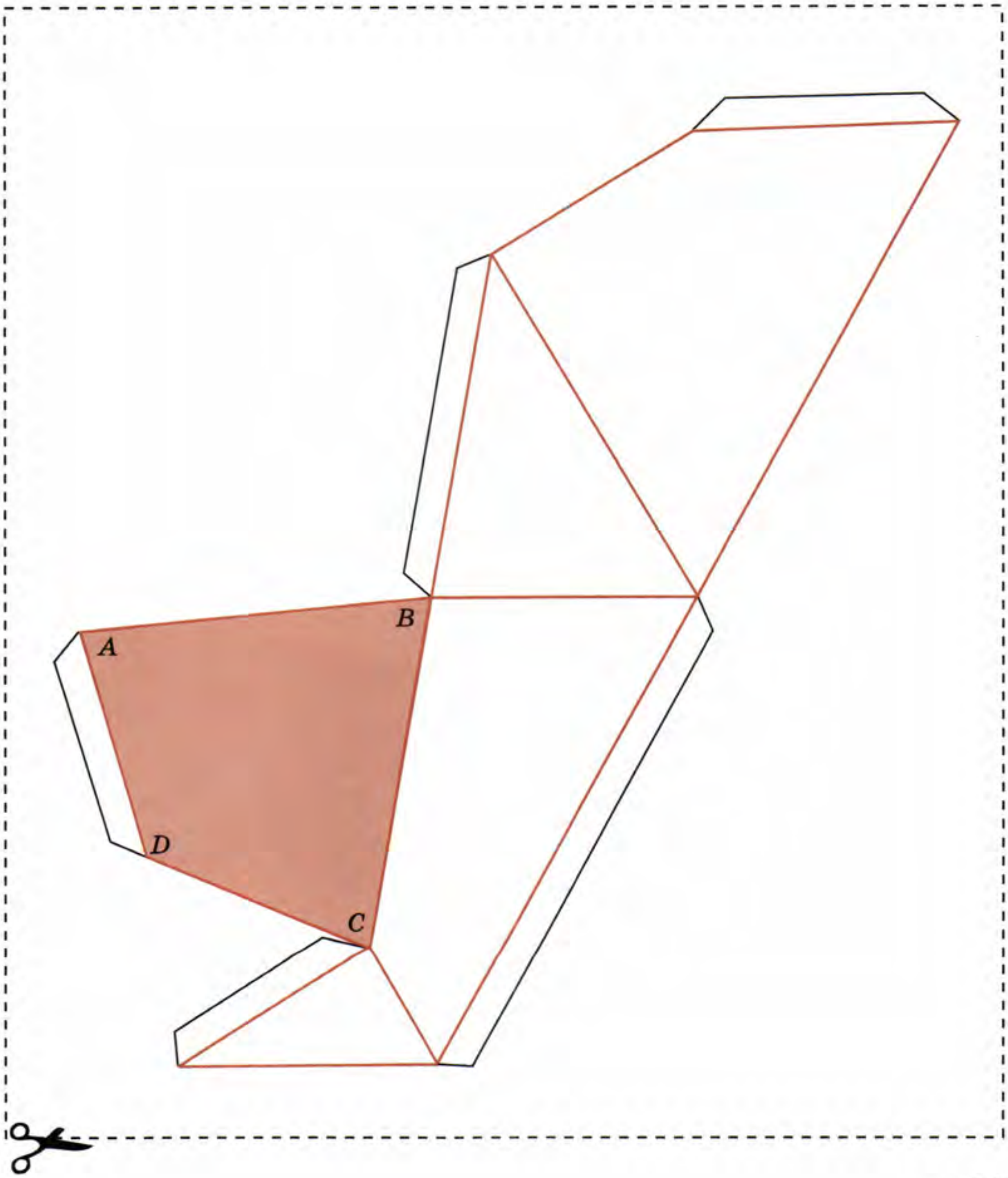
____

Следовательно, искомое сечение — треугольник MEF.

40

Отрежьте по штриховой линии часть листа с разверткой и наклейте ее на тонкий картон или плотную бумагу. Вырежите развертку, аккуратно согните по линиям и склейте. Вырежите и склейте развертку, изображенную на следующей странице.

Получится две части тетраэдра, рассеченного плоскостью. Сложите из них тетраэдр с сечением *ABCD*.

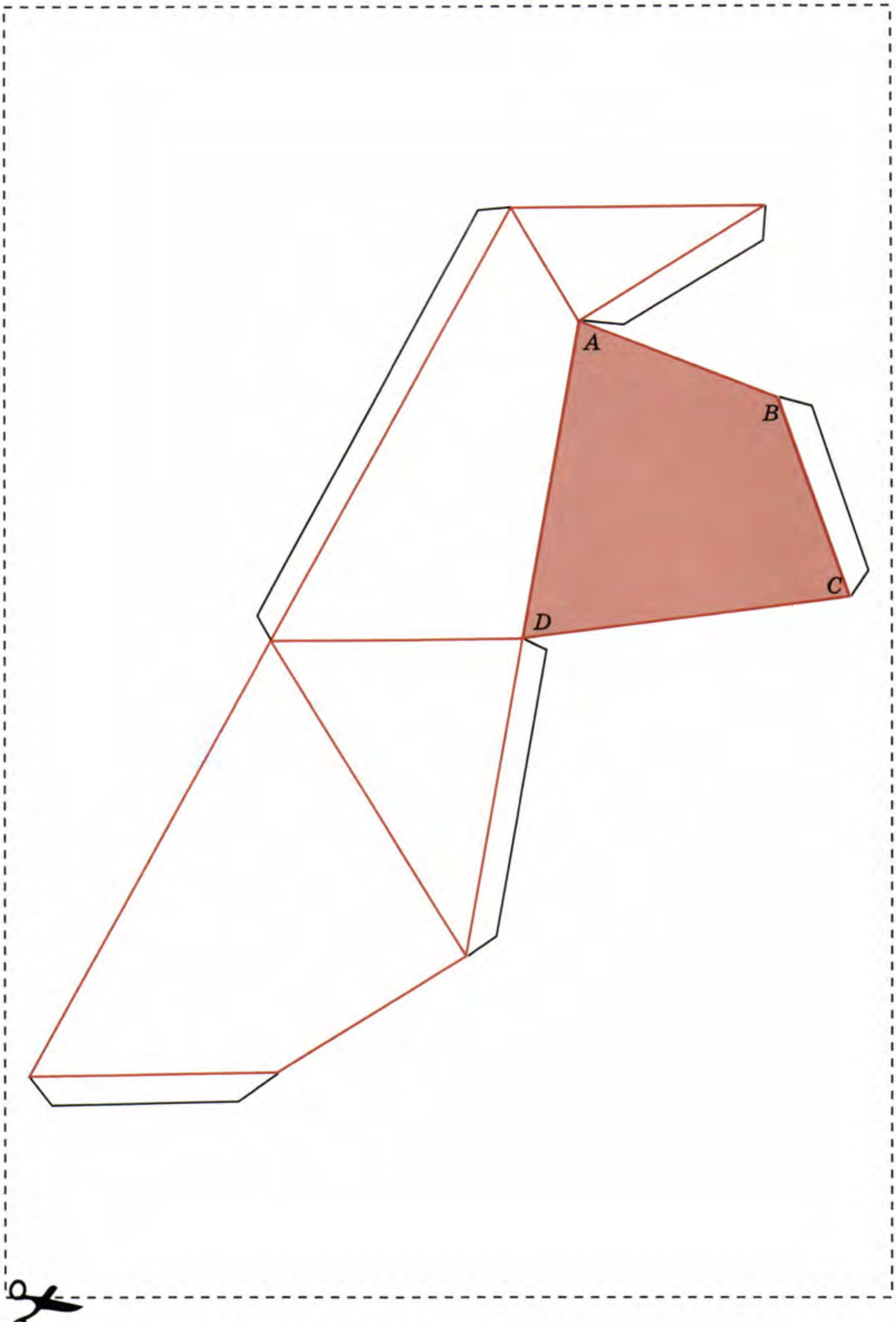


О[illegible] по шприцев и [illegible] поверхностей [illegible] зоны гонений шприцев для плотности [illegible]. Если [illegible] ценно [illegible] по [illegible] и [illegible]. [illegible]

наиболее [illegible] следующим образом [illegible]

[illegible] две [illegible] продольный [illegible]

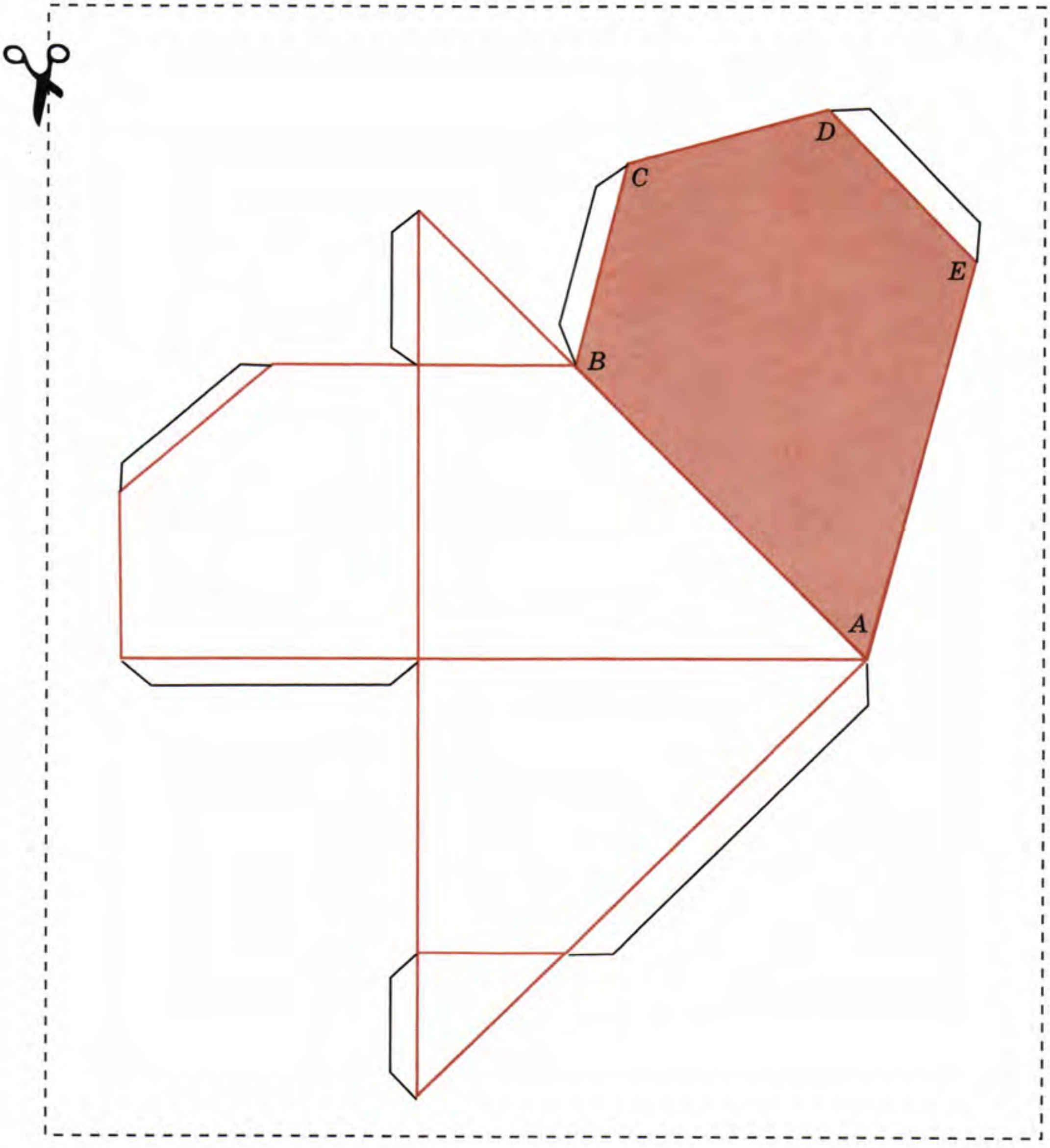
[illegible] с [illegible] ЯС)

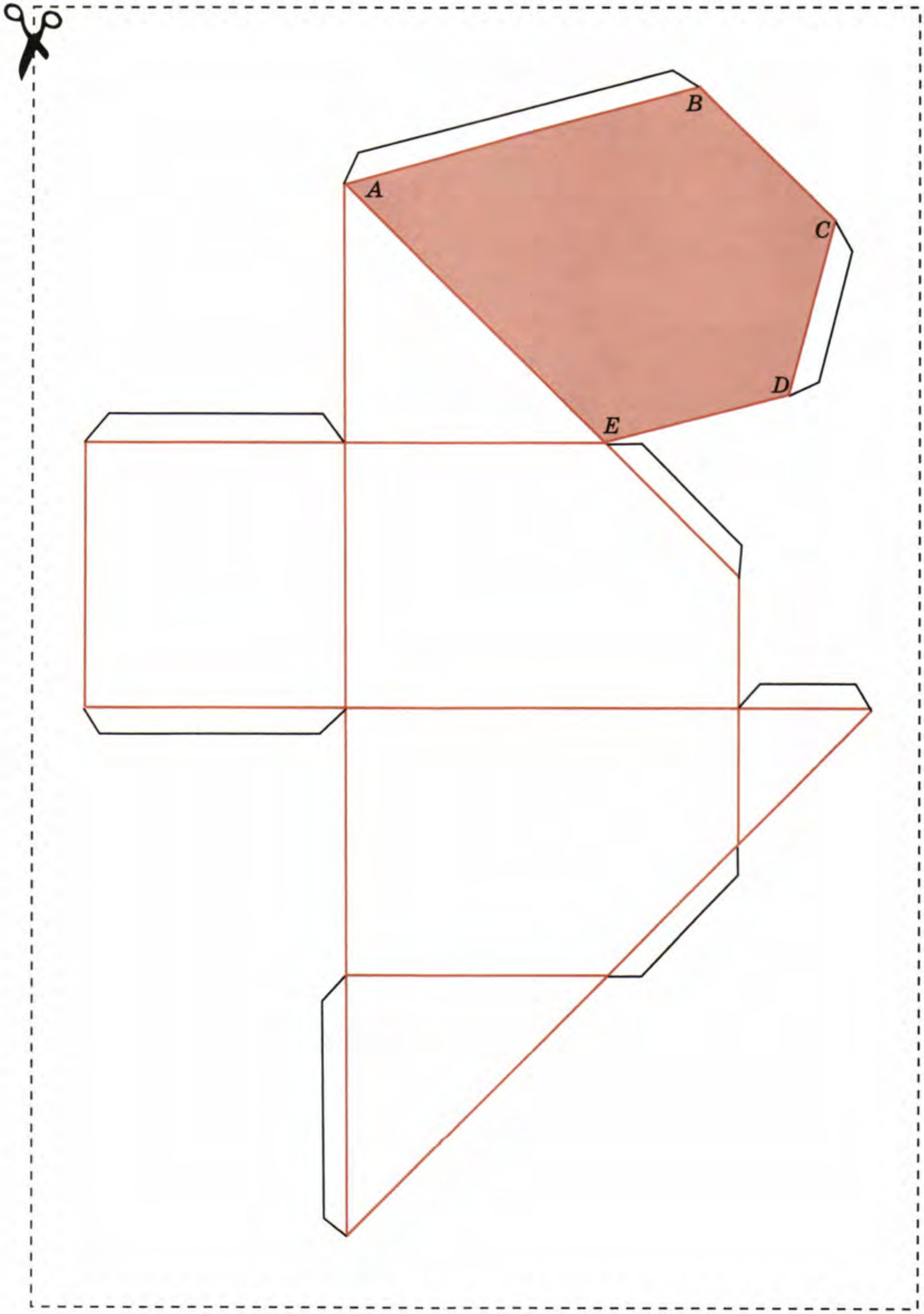

A
B
C
D

41

Отрежьте по штриховой линии часть листа с разверткой и наклейте ее на тонкий картон или плотную бумагу. Вырежите развертку, аккуратно согните по линиям и склейте. Вырежите и склейте развертку, изображенную на следующей странице.

Получится две части параллелепипеда, рассеченного плоскостью. Сложите из них параллелепипед с сечением $ABCDE$.





A
B
C
D
E

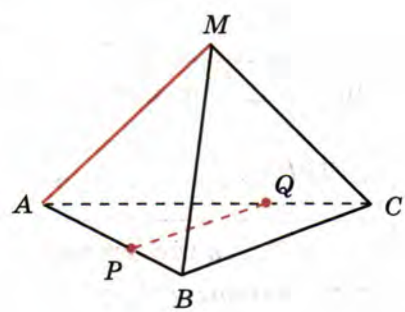
Глава II

Перпендикулярность прямых и плоскостей

§ 1 Перпендикулярность прямой и плоскости

42

В тетраэдре $MABC$ ребра MA и BC перпендикулярны, P — точка ребра AB, причем $AP : AB = 2 : 3$, Q — точка ребра AC и $AQ : QC = 2 : 1$. Докажите, что $MA \perp PQ$.



Доказательство. $\triangle APQ \sim \triangle ABC$, так как ______________________________ . Поэтому $PQ \parallel$ _____ , и угол между прямыми MA и PQ _______________ , т. е. $MA \perp$ _____

Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости)

Если прямая перпендикулярна к двум ______________________ ***прямым,*** ____ ,
то она ____

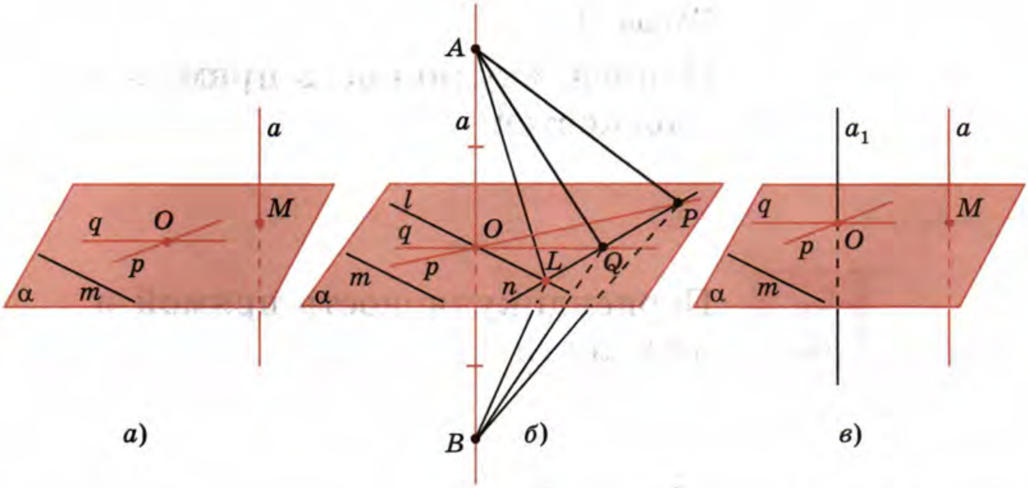
Дано: $a \perp p$, $a \perp q$, прямые p и q лежат в плоскости α и пересекаются в точке O (рис. *а*).

Доказать: $a \perp \alpha$.

Доказательство. Для доказательства перпендикулярности прямой a и плоскости α надо доказать, что $a \perp m$, где m —
____

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $O \in a$, $l \parallel m$ и $O \in l$, прямая n пересекает прямые p, q и l в точках P, Q, L, $OA = OB$ (рис. *б*). Так как прямые p и q — серединные



а) б) в)

______________________________, то $AP =$ ____
и $AQ =$ ____, и, следовательно, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ по ______________
______________. Поэтому $\angle APQ =$ ________. Далее $\triangle APL =$
$= \triangle BPL$ по ______________________________
______________________________, поэтому
$AL =$ ____, а это означает, что $\triangle ABL$ — ______________
и его медиана LO является __________, т. е. $LO \perp AB$ или $l \perp$ ___.
Так как $l \parallel m$ и $l \perp a$, то по лемме ______________
____
$m \perp$ ___. Таким образом, прямая a перпендикулярна к любой прямой плоскости α, а это означает, что ________

2) Пусть $O \notin a$ (рис. *в*). Проведем $a_1 \parallel a$, $O \in a_1$. Тогда $a_1 \perp p$ и $a_1 \perp q$ по лемме ______________________________
______________________________ и,
следовательно, $a_1 \perp \alpha$ согласно ______________________.
Итак, одна из параллельных прямых a и a_1 перпендикулярна ______________, поэтому и вторая прямая ______________
______________________, т. е. $a \perp$ ___. Теорема доказана.

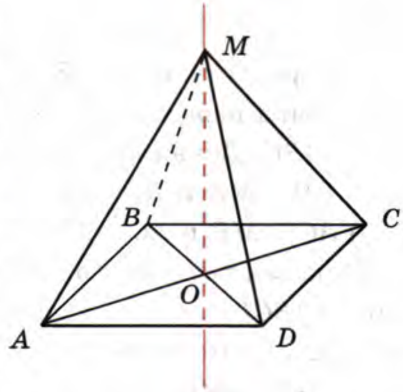
43

Через точку O пересечения диагоналей ромба $ABCD$ проведена прямая OM, перпендикулярная к плоскости ромба, причем $OM = 6$ см, $AC = 16$ см, $BD = 4\sqrt{3}$ см. Найдите:

а) расстояние от точки M до вершин ромба;

б) расстояние от точки M до стороны DC.

Решение. а) Четырехугольник $ABCD$ — ромб, а отрезки AC и BD — его диагонали, пересекающиеся в точке O, поэтому $OA =$ ____ , $OB =$ ____ . Так как $MO \perp ABC$, то $MO \perp$ ____ и $MO \perp$ ____ . В треугольниках AMC и BMD медиана MO является и __________ , поэтому эти треугольники ____________________ , т. е. ____________________________ .



Из прямоугольного треугольника AOM с катетами 6 см и 8 см имеем: $MA =$ ____ .

Из прямоугольного треугольника BOM находим: $MB =$ ______________ см.

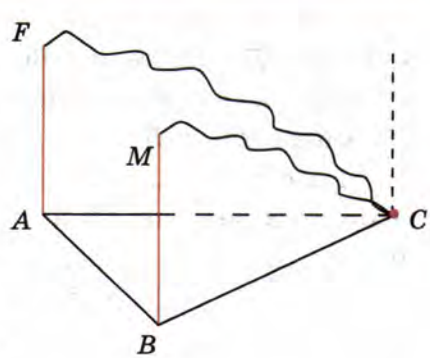
Итак, $MA = MC =$ ______ , $MB = MD =$ ______

б) В треугольнике DMC проведем $MP \perp DC$ и рассмотрим плоскость MOP. Прямая DC перпендикулярна к двум пересекающимся прямым ____ и ____ этой плоскости, следовательно, по ____ $DC \perp$ ____ , а потому перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости, в частности $DC \perp OP$. $\triangle COD$ прямоугольный, так как ____________________ , OP — его высота, поэтому $OP = \dfrac{CO \cdot OD}{DC} =$ ____________ $=$ ________

Ответ. а) ________ ; б) ________

44

На рисунке $AF \perp ABC$, $BM \perp ABC$. Докажите, что линия пересечения плоскостей AFC и BMC параллельна прямым AF и BM.



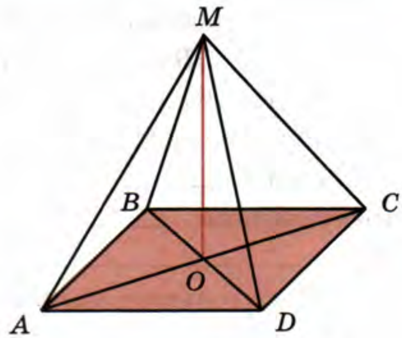
Доказательство. Так как $AF \perp ABC$ и $BM \perp ABC$, то $AF \parallel$ ____ , и, следовательно, $AF \parallel BMC$ по ____ . Плоскость AFC проходит через прямую AF, параллельную плоскости ______ , и пересекает эту плоскость. Следовательно, линия пересечения плоскостей __________ параллельна прямой ____ . А так как $AF \parallel BM$, то по ______________________________________ прямая BM также параллельна ____

45

Четырехугольник $ABCD$ — квадрат, O — точка пересечения его диагоналей, $OM \perp ABC$. Докажите, что:

а) $BD \perp MA$ и $BD \perp MC$;

б) $AC \perp MB$ и $AC \perp MD$.



Доказательство. Четырехугольник $ABCD$ — квадрат, поэтому $AC \perp$ _____ . По условию $MO \perp ABC$, следовательно, $MO \perp$ _____ и $MO \perp$ _____

а) Рассмотрим плоскость AMC. Прямая BD перпендикулярна к двум пересекающимся прямым ____________ этой плоскости, следовательно, по

____

$BD \perp$ ______ , а потому прямая BD перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости, в частности $BD \perp$ _____ и $BD \perp$ _____

б) Рассмотрим плоскость BMD. _____________________________

____

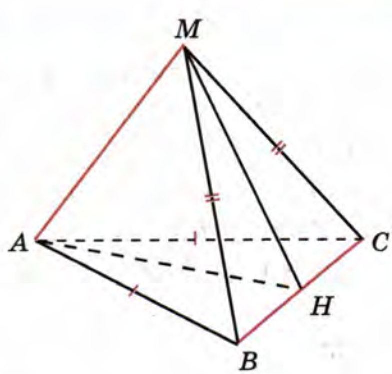
____

____

____

46

В тетраэдре $MABC$ $AB = AC$, $MB = MC$. Докажите, что $BC \perp AM$.



Доказательство. По условию треугольники BAC и BMC — ______________ ______ с общим ______________________ , поэтому их медианы AH и MH, проведенные к ______________________ , являются ______________________ , т. е. $AH \perp$ _____ и ______________

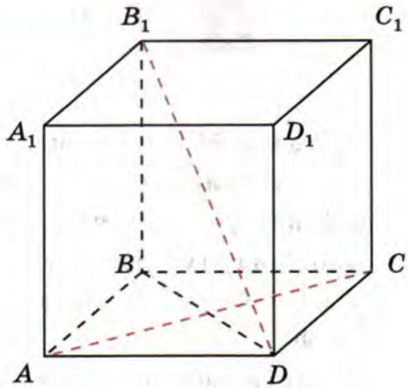
Рассмотрим плоскость AMH. Так как $BC \perp AH$ и $BC \perp$ _____ , то по

____

$BC \perp AMH$, а потому прямая BC перпендикулярна к любой ____ , в частности $BC \perp$ _____

47

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что диагональ куба B_1D перпендикулярна к диагонали AC его основания.



Доказательство. Так как грани AA_1B_1B и BB_1C_1C — квадраты, то $B_1B \perp BA$ и $B_1B \perp BC$. Следовательно, $B_1B \perp ABC$ по ______________________________

____

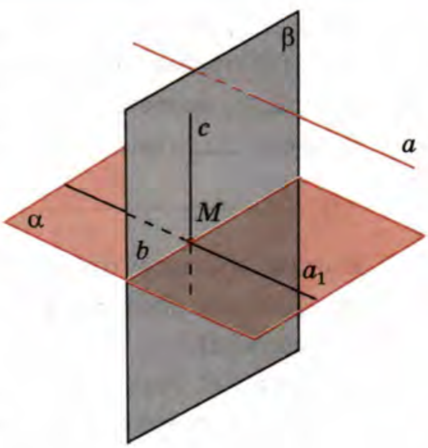
______________. Рассмотрим плоскость B_1BD. Поскольку $AC \perp BD$, так как ______________________________

______________________________, и $AC \perp B_1B$, так как ______________, то $AC \perp$ ______ по ______________________________

______________________________, а потому $AC \perp$ ______

48

Докажите, что через каждую из двух взаимно перпендикулярных скрещивающихся прямых проходит плоскость, перпендикулярная к другой прямой (задача 137 учебника).



Доказательство. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, причем $a \perp b$. Докажем, что через прямую b проходит плоскость, перпендикулярная к прямой a. Возьмем на прямой b какую-нибудь точку M и проведем через нее прямую a_1, параллельную прямой a. Так как $a_1 \parallel a$ и $a \perp b$, то $a_1 \perp$ ___. Пересекающиеся прямые a_1 и b определяют некоторую плоскость α. Пусть прямая c проходит через точку M и перпендикулярна к плоскости α. Тогда $c \perp b$ и $c \perp$ ___. Пересекающиеся прямые b и c определяют некоторую плоскость β. Поскольку $a_1 \perp b$ и $a_1 \perp c$, то $a_1 \perp$ ___ по ______________________________

______________________________, а так как $a \parallel a_1$, то $a \perp$ ___

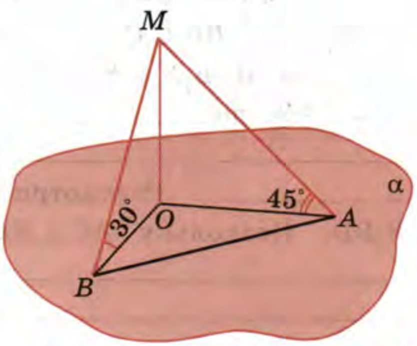
Итак, плоскость β проходит через прямую b и перпендикулярна к ______________. Аналогично доказывается, что через прямую a проходит ______________________________

§ 2

Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

49

Из точки M к плоскости α проведены перпендикуляр MO и две наклонные MA и MB, которые образуют со своими проекциями на эту плоскость $\angle MAO = 45°$, $\angle MBO = 30°$, угол между наклонными равен $90°$.



Найдите расстояние между основаниями наклонных, если проекция наклонной MA равна $\sqrt{3}$ см.

Решение. $MO \perp \alpha$, поэтому $MO \perp$ ____ и $MO \perp$ ____ . $\triangle AMO$ прямоугольный и равнобедренный: $\angle O =$ ____ , $\angle A = \angle$ ___ $=$ ____ , $AO =$ ______ , следовательно, $MO =$ ______ , $AM =$ ______ . $\triangle BMO$ прямоугольный: $\angle O =$ ____ , $\angle B =$ ____ , $MO =$ _____ , поэтому $MB = 2$ ____ $=$ ____ см.

$\triangle AMB$ прямоугольный: $\angle M =$ ____ , $AM =$ ______ , $BM =$ $=$ _______ , поэтому $AB =$ ____________ $=$ _________ $=$ ____ см.

Ответ. ____ см.

50

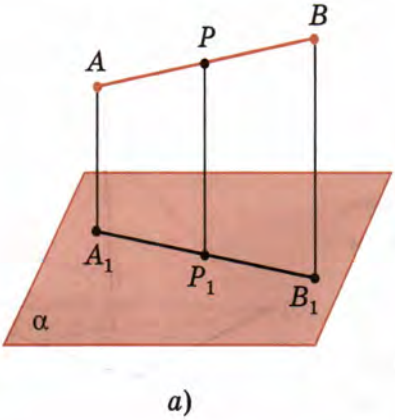
Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 1 см и 4 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α (задача 142 учебника).

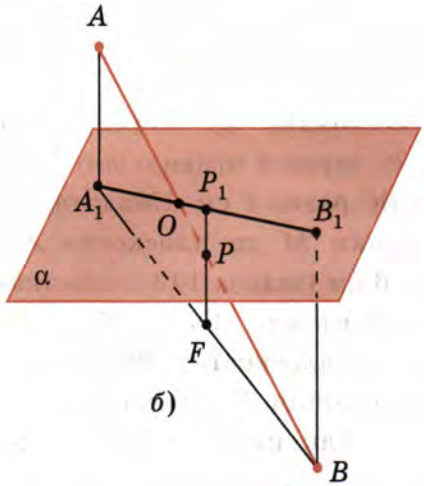
Решение. Рассмотрим два случая:

1) концы отрезка находятся по одну сторону от плоскости α;

2) концы отрезка находятся по разные стороны от плоскости α.

1) Пусть отрезок AB расположен по одну сторону от плоскости α (см. рис. *а*), $AA_1 \perp \alpha$, $AA_1 = 1$ см, $BB_1 \perp \alpha$, $BB_1 = 4$ см. Так как $AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel$ ____ , и поэтому четырехугольник A_1ABB_1 — __________ . Проведем в ней среднюю линию PP_1, тогда $PP_1 \parallel$ ____ , $PP_1 \parallel$ ____ , и так как $AA_1 \perp \alpha$, то и $PP_1 \perp$ ___ . Следовательно, длина отрезка PP_1 и есть искомое расстояние от середины отрезка AB до плоскости α, $PP_1 = \frac{1}{2}$ ____________ $=$ ______________ $=$ $=$ ____ см.



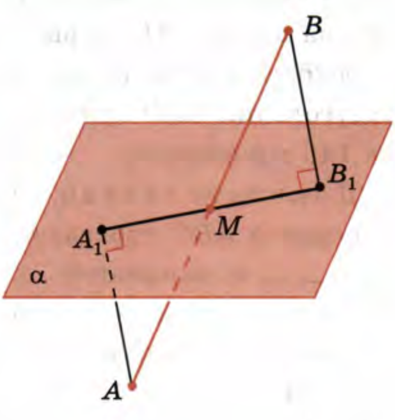


2) Пусть концы отрезка AB расположены по разные стороны от плоскости α (см. рис. *б*) и пусть AA_1 и BB_1 — перпендикуляры к плоскости α, $AA_1 = 1$ см, $BB_1 = 4$ см. Так как $AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel$ ______ , и прямые AA_1, BB_1, A_1B_1 лежат в одной ______________ . Проведем через точку P — середину отрезка AB — прямую, параллельную B_1B. Тогда по ________________________________ точки P_1 и F пересечения этой прямой с прямыми A_1B_1 и A_1B будут серединами отрезков ______ и ______ , а отрезки P_1F и PF — средними ______________ ________________________________ . $P_1P = P_1F$ – ______ =
= ______________ = ______ см.

Ответ. ______ см или ______ см.

51

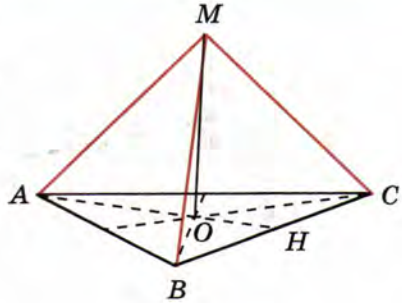
Докажите, что концы данного отрезка находятся на одинаковом расстоянии от любой плоскости, проходящей через его середину.



Доказательство. Пусть плоскость α проходит через середину M отрезка AB, $AA_1 \perp \alpha$, $BB_1 \perp \alpha$. Тогда $AM = MB$, $\angle AMA_1 = \angle BMB_1$ и ______
____
____
____
____

52

Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 4 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если $AB = 6$ см (задача 143 учебника).



Решение. Пусть MO — перпендикуляр к плоскости ABC, тогда расстояние от точки M до плоскости α равно _____ . Так как $MO \perp \alpha$, то $MO \perp OA$, $MO \perp$ _____ , $MO \perp$ _____ . $\triangle AOM =$ __________ $=$ __________ по

____

____

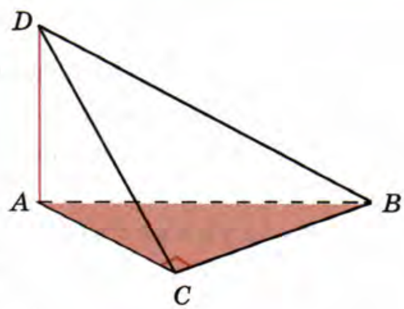
______________________________ , следовательно, $OA = OB = OC$, т. е. точка O равноудалена от ______________________________

и, значит, является центром этого треугольника. Поэтому $AO =$ _______ $=$ ___________ $=$ _____ (см), и из прямоугольного треугольника AMO находим: $MO =$ ___________ $=$ _________ (см) $=$ $=$ ___ см.

Ответ. ___ см.

53

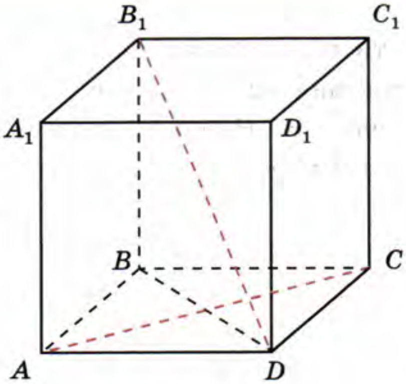
Через вершину A прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C проведена прямая AD, перпендикулярная к плоскости треугольника. Докажите, что треугольник CBD прямоугольный (задача 145 а учебника).



Доказательство. Из точки D к плоскости ABC проведены перпендикуляр _____ и наклонная _____ . Прямая BC лежит в плоскости ABC и перпендикулярна к проекции _____ наклонной _____ на эту плоскость, поэтому, согласно ____ ,

$BC \perp DC$, т. е. треугольник CBD ______________________________

54

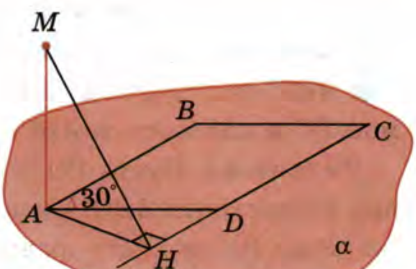


Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основанием которого является ромб $ABCD$, а боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания. Докажите, что диагональ B_1D параллелепипеда перпендикулярна к диагонали AC его основания.

Доказательство. $BB_1 \perp ABC$ ______________, диагональ B_1D — наклонная к плоскости ABC, BD — проекция ______________________________ ______________________________, диагональ AC лежит в плоскости ABC, $AC \perp BD$, так как ______________________________ ______________________________.

Следовательно, согласно теореме ______________________________, $AC \perp$ ______

55



Сторона ромба $ABCD$ равна 12 см, $\angle A = 30°$, $AM \perp ABC$, $AM = 6$ см. Найдите расстояние от точки M до прямой CD.

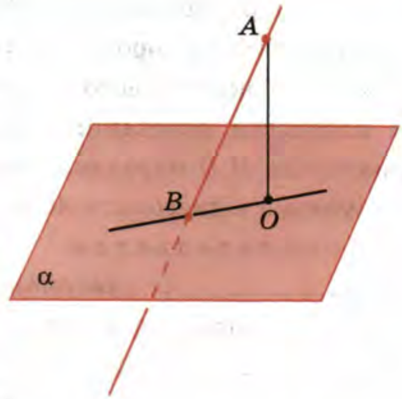
Решение. Из вершины A ромба $ABCD$ проведем отрезок $AH \perp DC$. Так как $\angle ADC =$ ______ — тупой, то основание H перпендикуляра AH лежит на продолжении луча _____ . Таким образом, из точки M к плоскости ABC проведены перпендикуляр MA и наклонная MH, при этом прямая CD плоскости ______ перпендикулярна к проекции _____ наклонной _____ . Поэтому, согласно ______________________________ ______________________________, $CD \perp$ _____ . Итак, длина перпендикуляра MH и есть расстояние от точки ___ до прямой _____

$\triangle AHD$ ______________________________, $\angle ADH =$ ______, $AD =$ ______,
поэтому $AH =$ ___ см. $\triangle MAH$ ______________________________, так как ______________ и $AM =$ ______, $AH =$ ___ см, поэтому $MH =$ ______ см.

Ответ. ______ см.

56

Через точку A, удаленную от плоскости α на расстояние $\sqrt{3}$ см, проведена прямая, пересекающая плоскость α в точке B. Найдите угол между прямой AB и плоскостью α, если $AB = 2$ см.

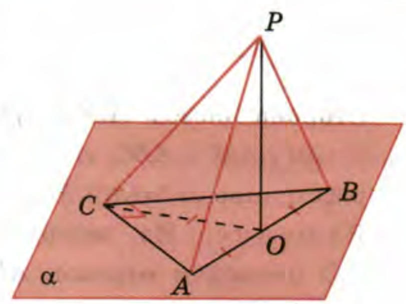


Решение. Пусть отрезок AO — перпендикуляр к плоскости α. Тогда $AO =$ $=$ ________ , прямая OB — проекция ________________________________ ,
а угол между прямой AB и плоскостью α равен $\angle$ ______ . Из прямоугольного треугольника AOB находим: $\sin \angle ABO =$ ______ $=$ ______ , следовательно, $\angle ABO =$ _____

Ответ. _____

57

В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 4\sqrt{3}$ см. Точка P не лежит в плоскости ABC и удалена от каждой вершины треугольника на расстояние $4\sqrt{3}$ см. Найдите угол между прямой PC и плоскостью ABC.



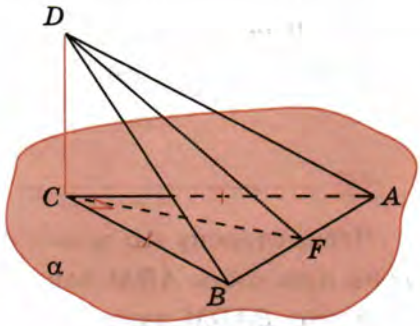
Решение. Пусть PO — перпендикуляр к плоскости ABC. Поскольку отрезки PA, PB и PC — равные наклонные, проведенные из ________ к ________________ , то их проекции тоже ________ , т. е. $OA =$ _____ $=$ _____ , а потому точка O — центр окружности, ________________________________
________________________ . Следовательно, точка O — середина ______________ . Так как $AB =$ ________ , то $CO = \frac{1}{2}$ _____ $=$ _____ см.

Искомый угол φ между прямой _____ и плоскостью ______ есть угол между ____ ,
т. е. $\varphi = \angle$ _____ . $\triangle POC$ прямоугольный, так как ____________ ,
$PC =$ _______ , $CO =$ ______ см, поэтому $\cos \varphi =$ _______ $=$ _______ $=$
$=$ _____ . Отсюда получаем, что $\varphi =$ _____

Ответ. _____

§ 3 Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей

58

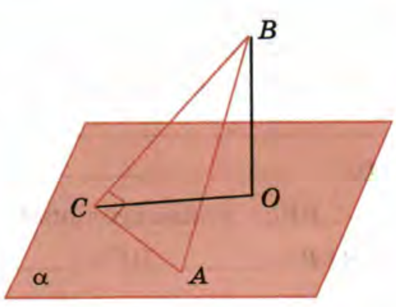


К плоскости равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой $AB = 12\sqrt{3}$ см проведен перпендикуляр DC, равный 18 см. Найдите угол между плоскостями DAB и CAB.

Решение. Треугольники ABC и ADB равнобедренные: $\triangle ABC$ __________________________, а в $\triangle ADB$ $DA =$ ______, так как эти стороны — ____. Поэтому медианы CF и DF этих треугольников, проведенные из вершин C и D к общему основанию ______, являются ________________________, и, следовательно, $\angle DFC$ — линейный угол ____, а значит, угол между плоскостями DAB и CAB равен $\angle$ ________. $\triangle DCF$ прямоугольный, $DC =$ __________, $CF = \frac{1}{2}$ ______ = ________ см и поэтому $\operatorname{tg} \angle DFC =$ ________ = ________ = = ______, откуда $\angle DFC =$ ______

Ответ. ______

59



Катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежит в плоскости α, а угол между плоскостями α и ABC равен 60°. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AC = 5$ см, $AB = 13$ см (задача 172 учебника).

Решение. Проведем перпендикуляр BO к плоскости α. Отрезок BC — наклонная к __________________________________, отрезок OC — проекция наклонной ______ на ____________________, а прямая AC, лежащая в плоскости α, перпендикулярна к наклонной BC. Следовательно, согласно ____,

$AC \perp OC$. Таким образом, $\angle BCO$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и ABC, и, значит, $\angle BCO =$ _____

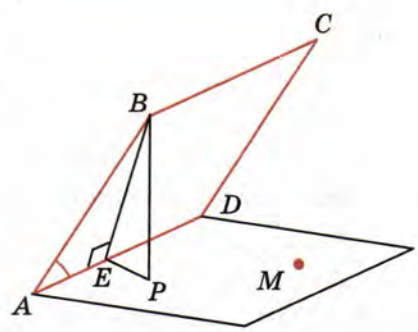
$\triangle ABC$ прямоугольный: $\angle C =$ _____, $AC =$ ______, $AB =$ ________, поэтому $BC =$ ________

$\triangle BCO$ прямоугольный: $\angle O =$ _____, $\angle BCO =$ _____, $BC =$ ________, следовательно, $BO =$ ______________ см $=$ ___________ см $=$ ______ см.

Ответ. ______ см.

60

Через сторону AD ромба $ABCD$ проведена плоскость ADM так, что двугранный угол $BADM$ равен $60°$. Найдите сторону ромба, если $\angle BAD = 45°$ и расстояние от точки B до плоскости ADM равно $4\sqrt{3}$ (задача 176 учебника).



Решение. Проведем перпендикуляр BP к плоскости ADM. Искомое расстояние от точки B до плоскости ADM равно BP. Проведем высоту ромба BE. Тогда получим, что из точки B к плоскости ADM проведены перпендикуляр _____ и наклонная _____

Следовательно, отрезок PE — проекция ____________________ на ____________________

Прямая AD, лежащая в плоскости ADM, перпендикулярна к наклонной BE, а потому, согласно ____, $AD \perp$ ______, и $\angle BEP$ — линейный угол ____, т. е. $\angle BEP =$ _____

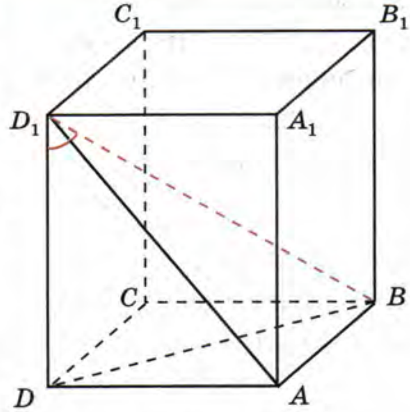
$\triangle BPE$ прямоугольный, так как ____________________, причем $\angle BEP =$ _____, $BP =$ ______, поэтому $BE =$ ____________________ $=$ $=$ ________________ $=$ ________

$\triangle BAE$ прямоугольный: $\angle E =$ _____, $\angle A =$ _____, $BE =$ ________, следовательно, $AB =$ ____________ $=$ ______

Ответ. __________

61

Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если его диагональ $BD_1 = 24$ см и составляет с плоскостью грани DAA_1 угол в 45°, а с ребром DD_1 — угол в 60°.

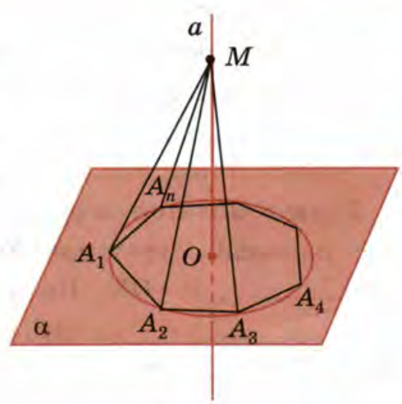


Решение. Все грани прямоугольного параллелепипеда — ____________________, поэтому $BA \perp$ ______, $BA \perp$ ______, и, следовательно, $BA \perp DAA_1$. Прямая BD_1 пересекает плоскость DAA_1 в точке _____, а прямая AD_1 — проекция ______ на эту плоскость, поэтому $\angle AD_1B$ — это угол между диагональю _____ и ____________________. По условию $\angle AD_1B =$ _____. Из прямоугольного треугольника AD_1B, в котором $\angle A =$ _____, $D_1B =$ ________ и $\angle D_1 =$ _____, находим: $AB = AD_1 =$ $=$ ________ $=$ ______ см. Из прямоугольного треугольника BD_1D, в котором $\angle D =$ _____, $BD_1 =$ ________, $\angle BD_1D =$ _____ по условию, получаем: $D_1D = \frac{1}{2}$ ______ $=$ _____ см. Из треугольника AD_1D, в котором $\angle D =$ _____, $AD_1 =$ __________, $DD_1 =$ ________, находим: $AD =$ _____ см.

Ответ. ____________________________

62

Докажите, что любая точка прямой, которая проходит через центр окружности, описанной около многоугольника, и перпендикулярна к плоскости многоугольника, равноудалена от вершин этого многоугольника (задача 200 учебника).

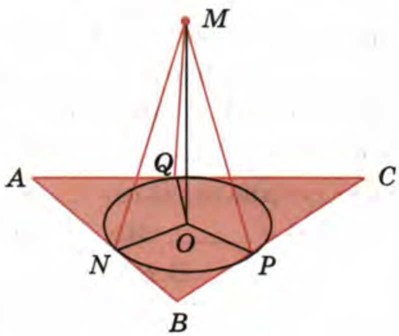


Доказательство. Пусть прямая a проходит через центр O окружности, описанной около многоугольника $A_1A_2...A_n$, и перпендикулярна к плоскости α этого многоугольника. Ясно, что точка O равноудалена от вершин многоугольника, так как является центром описанной около него окружности: $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. Пусть M — произвольная точка прямой a, отличная от точки O. Тогда

MO — перпендикуляр, MA_1, MA_2, ..., MA_n — ______________________, проведенные из точки ___ к _________________________________, а OA_1, OA_2, ..., OA_n — проекции наклонных на _________________________. Так как проекции равны, то равны и ___________________________________, т. е. _________________________________. Таким образом, любая точка прямой a равноудалена от ____

63

В треугольнике ABC $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Точка M удалена от прямых AB, BC и AC на 5 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если известно, что ее проекция на эту плоскость лежит внутри треугольника.



Решение. Пусть MO — перпендикуляр к плоскости ABC, а MN, MP и MQ — перпендикуляры к прямым AB, BC и AC. Требуется найти MO. По теореме, ____ _____________ имеем: $AB \perp ON$, $BC \perp$ _____ и $AC \perp$ _____. Итак, из точки M проведены к плоскости ABC перпендикуляр MO и наклонные MN, MP и MQ. По условию расстояния от точки M до прямых AB, BC и AC равны, т. е. равны наклонные _____, _____ и _____. Следовательно, потому равны и их проекции на эту плоскость: __________________

Таким образом, точка O лежит внутри треугольника ABC и равноудалена от _________________, поэтому она является _________________________ ____

Радиус ON этой окружности найдем, используя формулу $S = pr$, где S — площадь треугольника ABC, p — его ______________________, $p =$ ________, $r = ON$. По формуле Герона $S =$ ______________________ = = ______________ = _____ см^2, следовательно, $r =$ _____ = _____ (см) = _____ см. Итак, $NO =$ ___ см.

Треугольник MON _________________________, поскольку _____ $\perp ABC$, и потому $MO \perp$ _____. Так как $MN =$ _______, $ON =$ _______, то из треугольника MON находим: $MO =$ ____________ = ___ см.

Ответ. ___ см.

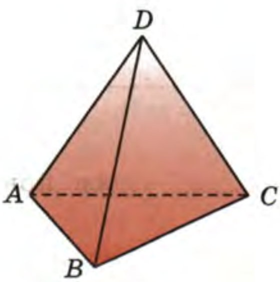
Глава III

Многогранники

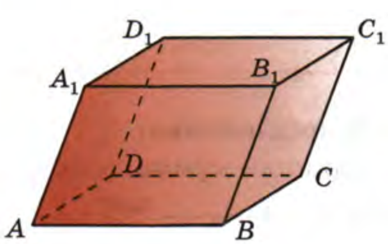
§ 1 Понятие многогранника. Призма

64

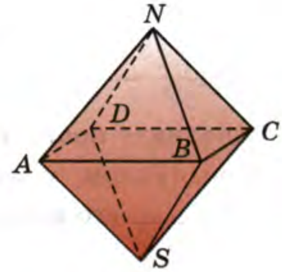
Сколько граней, ребер, вершин и диагоналей у каждого из изображенных на рисунке многогранников?



а) Тетраэдр



б) Параллелепипед



в) Октаэдр

Решение.

а) Тетраэдр *DABC* составлен из ______ граней. Он имеет ______ ребер и ______ вершины. Диагональю многогранника называется ____________, соединяющий две ____________, не принадлежащие ____________. У тетраэдра любые две вершины ______________ одной грани, следовательно, у него ______ диагоналей.

б) ______________________ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ составлен из ____ граней. Он имеет _____ ребер, _____ вершин и _____ диагонали (AC_1, ________________).

в) __________________ *NABCDS* имеет ______________________________ и ___ диагонали (*AC*, ____________).

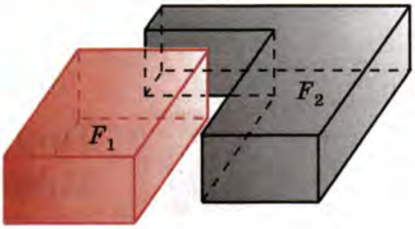
65

Параллелепипед разрезали на два многогранника F_1 и F_2. Какой из получившихся многогранников выпуклый и какой невыпуклый?

Решение.

а) Многогранник F_1 — параллелепипед. Он расположен по одну сторону от плоскости ________________ его грани. Следовательно, F_1 — ________________ многогранник.

б) Верхняя грань многогранника F_2 является невыпуклым ________________ ________________, следовательно, F_2 — ________________ многогранник.



Ответ.

F_1 — ________________ многогранник,

F_2 — ________________ многогранник.

66

Заполните пропуски в предложении:

В выпуклом многограннике сумма всех ____________ углов при ____________ его вершине ____________ 360°.

67

Выпуклый многогранник имеет 8 вершин. Докажите, что сумма всех его плоских углов меньше 3200°.

Доказательство. Так как данный ________________ выпуклый, то сумма всех плоских ____________ при ____________ его вершине меньше ________, следовательно, сумма всех его плоских ________________ при восьми вершинах ________________ 360° · ___ = ________, а это ________________ 3200°, что и требовалось доказать.

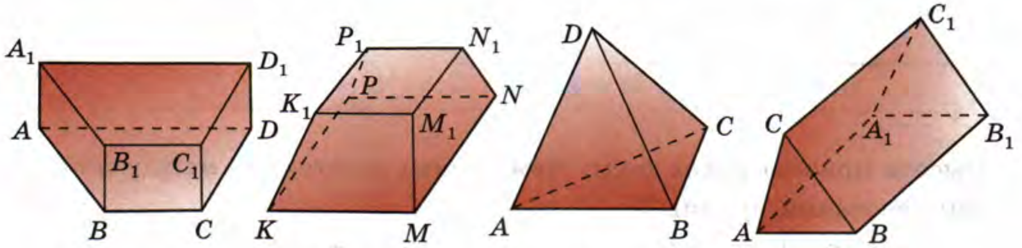
68

Заполните пропуски в определении призмы:

Многогранник, составленный из ________________ многоугольников $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$, расположенных в ________________ плоскостях, и ___ параллелограммов, называется ________________

69

Какой из данных многогранников является призмой?



а) *б)* *в)* *г)*

Р е ш е н и е.

а) Грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ многогранника ________________ равны и расположены в параллельных ____________________. Остальные _____ грани — параллелограммы. Следовательно, __________________ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ____________ призмой.

б) Грань KK_1M_1M многогранника ________________ не является ______________________________. Следовательно, этот многогранник ________________ призмой.

в) У многогранника $ABCD$ нет граней, расположенных в __________________________ плоскостях. Следовательно, этот многогранник ____________________ призмой.

г) Грани ABC и $A_1B_1C_1$ ____________________ $ABCA_1B_1C_1$ — равные ________________, расположенные в ________________ плоскостях. Остальные ___ грани являются ______________________________. Следовательно, многогранник $ABCA_1B_1C_1$ ____________________ призмой.

70

Сколько граней, вершин и ребер имеет n-угольная призма?

Р е ш е н и е.

а) n-угольная призма состоит из _______ n-угольников (______________ призмы) и ___ параллелограммов (боковых __________), т. е. имеет ___ + ___ граней.

б) У каждого основания n-угольной ______________ имеется ___ вершин, а всего у призмы _____ вершин.

в) Каждое основание ________________ призмы имеет ___ сторон, кроме того, имеется ___ боковых _________. Следовательно, число всех ребер равно ___ · 2 + ___ = ____

Ответ. n-угольная призма имеет ________ граней, ___________
____

71

Высота призмы равна 5 см. Чему равно расстояние между плоскостями оснований призмы?

Решение. Основания призмы расположены в ____________ ____________ плоскостях, а расстоянием между параллельными плоскостями называется ______________________ от произвольной ________ одной из параллельных __________________ до другой плоскости.

Расстоянием от данной точки до плоскости называется длина _________________________, проведенного из этой _________ к данной ____________________

Поскольку высотой призмы называется ____________________, проведенный из какой-нибудь точки одного __________________ к плоскости другого ____________________________, то длина высоты и есть искомое ___________________________ между плоскостями оснований ______________

Ответ. ___ см.

72

Докажите, что все боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

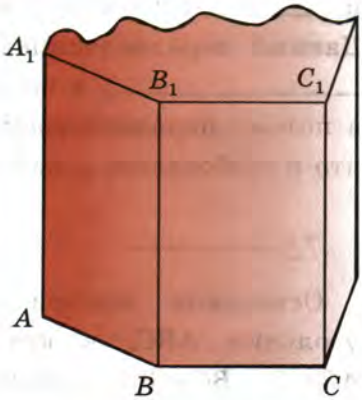
Доказательство.

1) Прямой призмой называется ____________, боковые ребра которой ________________________ к основаниям. Но если прямая перпендикулярна к плоскости, то по определению она _____________ _____________ к любой прямой, лежащей в этой __________________. Следовательно, боковые ребра прямой призмы __________________________ к сторонам основания.

2) Каждая боковая грань призмы является _________________________, а параллелограмм, смежные стороны которого взаимно перпендикулярны, является ___________________________. Следовательно, все боковые грани прямой призмы — _______________________, что и требовалось доказать.

73

Докажите, что призма, две смежные боковые грани которой — прямоугольники, является прямой призмой.

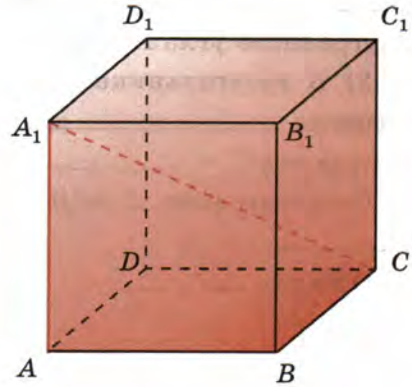


Доказательство.

Пусть боковые грани ABB_1A_1 и BCC_1B_1 — прямоугольники (на рисунке изображена часть призмы). Тогда прямая BB_1 ________________________ к двум пересекающимся прямым AB и _____ плоскости основания, следовательно, ребро _____ перпендикулярно к основанию призмы. Так как все боковые ___________ призмы параллельны, а ребро BB_1 ________________________ к основанию призмы, то и все боковые ребра __________________________ к основанию ____________, а значит, призма является ____________, что и требовалось ________________

74

Постройте диагональное сечение прямого параллелепипеда (т. е. сечение, содержащее диагональ параллелепипеда и боковое ребро). Докажите, что построенное сечение является прямоугольником.



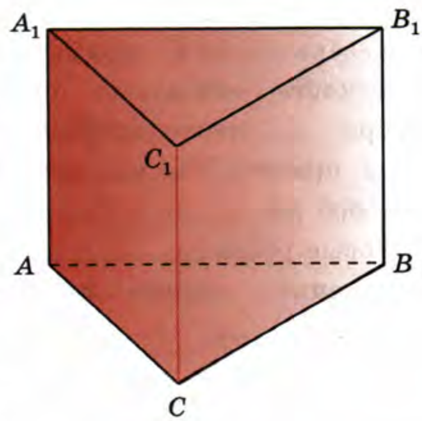
Решение.

1) Рассмотрим, например, сечение, содержащее диагональ A_1C и ребро AA_1. Секущая плоскость AA_1C имеет с плоскостью грани $ABCD$ две общие точки ___ и ___, следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой _____, а отрезок _____ служит стороной сечения. Проведем этот отрезок.

Так как AA_1 ___ CC_1, то эти прямые лежат в плоскости сечения, а значит, отрезки AA_1 и _____ — стороны сечения. Наконец, отрезок ______ — четвертая сторона ____________. Проведем этот отрезок. Итак, искомое сечение — четырехугольник ____________

2) Так как боковые ребра параллелепипеда ________________ и ________, то четырехугольник AA_1C_1C — ________________. Данный параллелепипед прямой, поэтому ребро AA_1 ________________ ________________ к плоскости основания, следовательно, AA_1 ___ AC, а потому параллелограмм AA_1C_1C является ________________, что и требовалось доказать.

75



Основание прямой призмы — треугольник ABC, в котором $AB=\sqrt{7}$, $AC=2$, $BC=3$. Найдите двугранный угол при боковом ребре CC_1.

Решение.

1) Поскольку призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то ребро CC_1 ________________ к плоскости ABC, а значит, AC ___ CC_1 и BC ___ CC_1 (по ________________ прямой, перпендикулярной к плоскости). Следовательно, угол ACB является ________________ углом искомого двугранного угла ACC_1B.

2) В треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 +$ _____ $- 2$ _____ $\cdot$ _____ $\cos C$ (теорема ________________), т. е. $(\sqrt{7})^2 =$ ____ $+$ ____ $-$ ____ , откуда $\cos C =$ ____________ $=$ ___

Следовательно, $\angle ACB =$ _____, т. е. двугранный угол ACC_1B равен ________

Ответ. ________

76

Диагональ AC основания прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 6 см, а высота призмы равна $6\sqrt{3}$ см. Найдите угол наклона диагонали A_1C к плоскости основания.

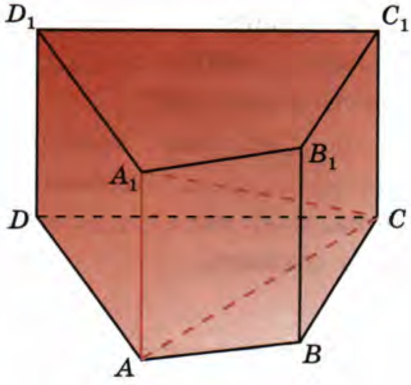
Решение.

1) Из определения прямой призмы следует, что ее боковое ребро ________________ к плоскости ________________ и равно высоте ____________, т. е. $AA_1 = 6\sqrt{3}$ см.

2) Поскольку прямая AA_1 ______________ ______________ к плоскости ABC, то прямая AC является ______________ прямой A_1C на плоскость ABC, и, следовательно, угол наклона ______________ A_1C к плоскости ABC равен углу ________

3) Поскольку прямая AA_1 ______________ ______________ к плоскости ABC, то AA_1 ___ AC (по определению прямой, ______________ к плоскости). Из прямоугольного треугольника A_1AC получаем: $\mathrm{tg}\angle A_1CA = AA_1$: ________ = = ________ : ______ = ______ . Следовательно, $\angle A_1CA$ = __________

Ответ. __________

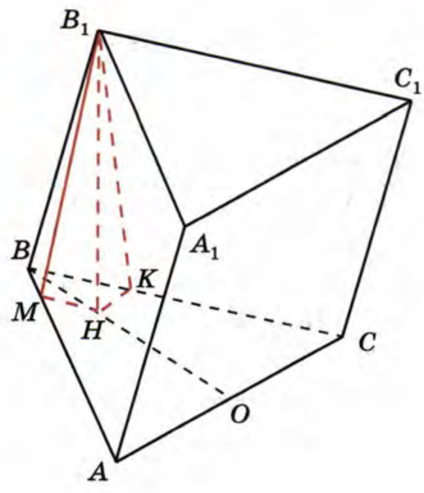


77

Основание призмы — равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), а боковое ребро BB_1 образует равные острые углы с ребрами AB и BC. Докажите, что прямые BB_1 и AC взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Докажем, что проекция прямой BB_1 на ______________ ABC перпендикулярна к прямой _____ , тогда по теореме о трех ______________ ______________ получим: BB_1 ___ AC.

1) Проведем перпендикуляр B_1H к плоскости ______ , тогда прямая BH — ______________ прямой BB_1 на плоскость ABC.



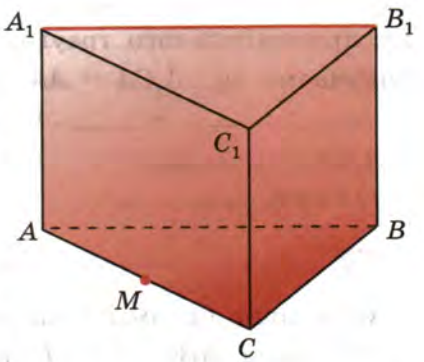
2) Пусть $B_1M \perp AB$, $B_1K \perp BC$. Так как по условию задачи $\angle B_1BA =$ $= \angle$ ______ , то $\triangle B_1BM = \triangle$ ______ (по гипотенузе и острому ________), следовательно, BM ___ BK.

3) $B_1M \perp$ ______ и отрезок B_1H — ______________________ к плоскости ABC, следовательно, $MH \perp AB$ как проекция наклонной _____ на плоскость ABC (по обратной теореме о трех ______________). Аналогично KH ___ BC.

4) $\triangle BMH$ ___ $\triangle BKH$ (по катету и ______________________), следовательно, $\angle MBH = \angle$ ______, т. е. отрезок BO — ______________________ треугольника ABC.

5) Так как треугольник ABC равнобедренный, AC — его ______________, то биссектриса BO является ____________ треугольника, т. е. $BO \perp$ ____, и, следовательно, BB_1 ___ AC, что и требовалось доказать.

78



Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 4 см, а сторона основания — 6 см. Найдите периметр сечения, проходящего через ребро A_1B_1 и точку M — середину ребра AC.

Решение.

1) Основания призмы расположены в ______________________ плоскостях, следовательно, секущая плоскость пересекает плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ по ______________________ прямым. Проведем через точку M прямую m, ______________________ прямой AB. Обозначим точку пересечения прямых m и BC буквой K.

$MK \parallel AB$, AB ___ A_1B_1, следовательно, MK ___ A_1B_1. Проведем отрезки A_1M и ___ . Четырехугольник ____________ — искомое сечение.

2) Периметр четырехугольника A_1B_1KM равен $A_1B_1 +$ __________ $+$ $+ MA_1$, где $A_1B_1 =$ ___ см и $MK =$ ___ см (MK — ______________ линия треугольника ABC). Найдем длины отрезков A_1M и B_1K. По определению правильной призмы ее основание — ____________________ треугольник, а боковые ребра ________________________ к плоскости ABC. Следовательно, $AM =$ ___ см и AA_1 ___ ABC.

Из прямоугольного $\triangle A_1AM$ находим: $A_1M = \sqrt{AA_1^2 + \text{\_\_\_\_}} =$

$= \sqrt{\text{\_\_\_\_} + 3^2} = \sqrt{\text{\_\_\_\_}} =$ ___ (см).

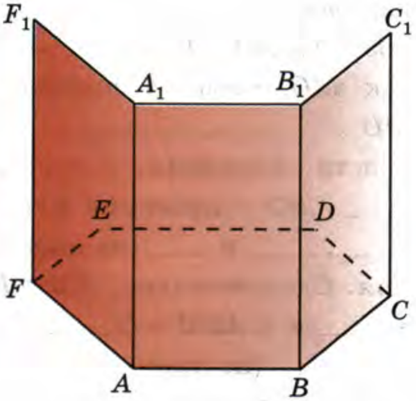
Аналогично из прямоугольного ____________________________ BB_1K получаем: $B_1K =$ ___ см.

Итак, $A_1B_1 +$ ____________ $+ MA_1 = 6 +$ __________ $=$ ____ (см).

Ответ. Периметр сечения равен ____ см.

79

Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно 4 см (достройте рисунок). Найдите площади ее боковой и полной поверхностей.



Решение.

1) Любая правильная призма является ____________ призмой, следовательно, площадь ее боковой поверхности равна ______________________________ периметра ________________ на __________ призмы, т. е. $S_{бок} = P \cdot$ ___ , где $P =$ ___ $\cdot 6 =$ _____ (см), $h =$ ___ см.

Таким образом, $S_{бок} =$ _____ $\cdot$ ___ $=$ $=$ _____ (см^2).

2) Площадь полной ________________ любой призмы равна _________ площадей _______ ее граней, т. е. $S_{полн} =$ _______ $+ 2$ _______ . Основание данной призмы — ____________________ шестиугольник со стороной $a = 4$ см, следовательно, $S_{осн} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ___ $=$ _____ $\cdot 4^2 =$ _____ (см^2).

Итак, $S_{полн} =$ (_____ $+$ ______) см^2.

Ответ. $S_{бок} =$ ________ , $S_{полн} =$ ____________________

§ 2 Пирамида

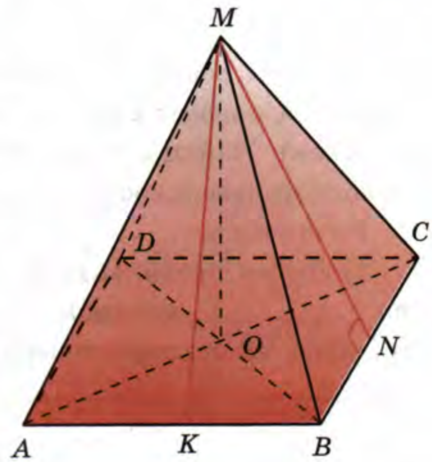
80

Основание пирамиды — прямоугольник $ABCD$, $AB = 18$ м, $BC = 10$ м, высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 12 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение.

1) Площадь полной поверхности пирамиды вычисляется по формуле $S_{полн} =$ __________ $+$ __________ . Так как основание пирамиды — ____ со сторонами 10 м и _________ , то $S_{осн} =$ _____ $\cdot$ _____ $=$ ______ (м^2).

2) Чтобы найти площадь боковой ________________ пирамиды, вычислим площади ее ____________ граней.



В прямоугольнике $ABCD$ AC ___ BD, диагонали ________________ в точке O, поэтому $AO = BO =$ ____ $=$ ____ . Отрезок MO — высота пирамиды, значит, MO — ____________________ к плоскости основания, и отрезки AO, BO, ____ , DO — проекции наклонных AM, ____ , ____ и ____ на плоскость основания. Следовательно, $AM = BM =$ ____ $=$ $=$ ____ и $\triangle ABM = \triangle$ ______ , а $\triangle BCM =$ $=$ ______ (по трем ________________), поэтому S_{ABM} ___ S_{CDM} и S_{BCM} ___ S_{ADM}.

3) Пусть $MK \perp AB$, тогда OK ___ AB (обратная теорема о ________ перпендикулярах) и $OK =$ ____ $BC = 0{,}5 \cdot$ ____ $=$ ___ (м). Аналогично если $MN \perp BC$, то $ON =$ ____ $AB = 0{,}5 \cdot$ ____ $=$ ___ (м).

Поскольку $MO \perp ABC$, то MO ___ OK, а значит, $MK = \sqrt{MO^2 + \_\_\_\_} =$ $= \sqrt{\_\_ + 5^2} = \sqrt{\_\_\_\_} =$ ____ (м).

Аналогично $MN = \sqrt{\_\_\_\_ + ON^2} = \sqrt{12^2 + \_\_} = \sqrt{\_\_\_\_} =$ ____ (м).

Итак, $S_{ABM} = 0{,}5AB \cdot$ ____ $=$ ____ $\cdot\ 18 \cdot$ ____ $=$ _____ (м^2), $S_{BCM} =$ $=$ ____ . Отсюда получаем:
$S_{бок} = 2(S_{ABM} +$ ________ $) =$ ___ $\cdot$ (________ $+$ _______) $=$ ________ (м^2),
$S_{полн} =$ ________ $+$ ________ $=$ ________ (м^2).

Ответ. ________________________

81

Все боковые ребра пирамиды равны между собой. Докажите, что:

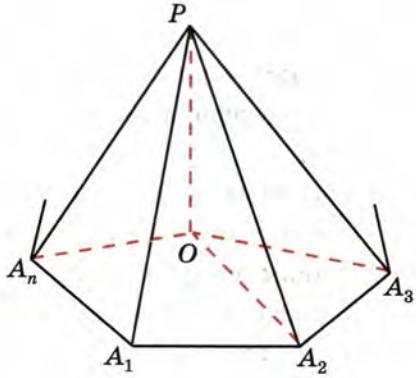
а) высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания;

б) все боковые ребра составляют равные углы с плоскостью основания.

Доказательство.

а) Пусть основание пирамиды — многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$, отрезок PO — высота пирамиды. Тогда отрезки OA_1, ____ , ..., OA_n — проекции боковых ________ PA_1, PA_2, ..., ____ на плоскость основания. Так как

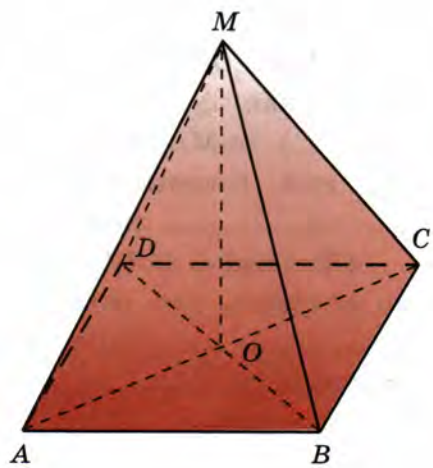
$PA_1 = PA_2 = \ldots =$ ________ , то OA_1 ___ ___ OA_2 ___ ... ___ OA_n. Следовательно, точка O равноудалена от ________ многоугольника $A_1A_2...A_n$, поэтому она является ____________ окружности, ______________ около основания пирамиды.



б) $\triangle A_1PO = \triangle$ ______ $= \ldots = \triangle A_nPO$ (по гипотенузе и ________), следовательно, $\angle PA_1O = \angle$ ______ $= \ldots = \angle PA_nO$, что и требовалось доказать.

82

Основание пирамиды — параллелограмм со сторонами 6 см и 8 см, высота пирамиды равна 12 см, а все боковые ребра равны между собой. Найдите длину бокового ребра.



Решение.

1) Пусть отрезок MO — высота ____________ . Так как $MA = MB =$ $=$ ____ $=$ ____ , то $OA =$ ____ $=$ ____ $=$ $=$ ____ , поэтому точка O — центр ____________ , ____________ около параллелограмма $ABCD$. Но тогда параллелограмм является ________ ____________ , диагонали которого пересекаются в точке ___ и равны друг другу.

2) По теореме Пифагора $AC = \sqrt{AB^2 + \_\_\_\_} = \sqrt{6^2 + \_\_} = \sqrt{\_\_\_\_} =$ $=$ ____ (см), следовательно, $OA =$ ____ см.

3) $MO \perp ABC$, поэтому MO ___ OA. В треугольнике AMO

$MA = \sqrt{OA^2 + \_\_\_\_} = \sqrt{5^2 + \_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_} =$ ____ (см).

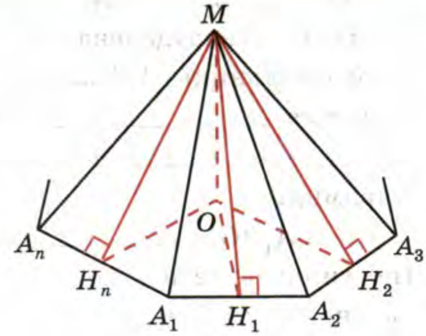
Ответ. ________

83

Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Докажите, что:

а) высоты всех боковых граней, проведенные к сторонам основания пирамиды, равны между собой;

б) высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание.



Доказательство.

а) Пусть отрезок MO — высота пирамиды $MA_1A_2A_3 \dots A_n$, $OH_1 \perp A_1A_2$, $OH_2 \perp A_2A_3$. Тогда MH_1 ___ A_1A_2, MH_2 ___ A_2A_3 (по теореме о трех ______________________________). Отсюда следует, что углы MH_1O и MH_2O __________ как линейные ________ равных ________________ углов MA_1A_2O и MA_2A_3O.

Так как $\triangle MH_1O$ ___ $\triangle MH_2O$ (по катету и противолежащему _______), то MH_1 ___ MH_2. Аналогично можно доказать равенство высот всех боковых граней пирамиды, проведенных к сторонам _________________ пирамиды.

б) Так как $\triangle MH_1O = \triangle$ _______, то OH_1 ___ OH_2. Аналогично можно доказать, что равны расстояния от точки ___ до всех сторон _________________ пирамиды. Следовательно, точка O — _______________ окружности, __________________ в основание пирамиды, что и требовалось доказать.

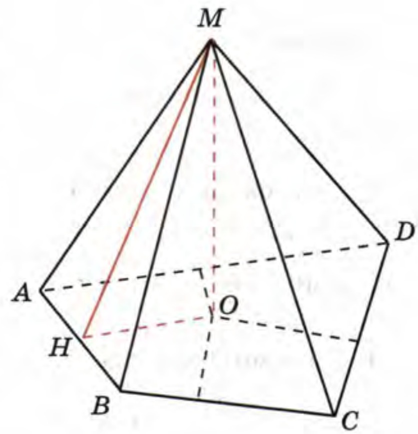
84

Все двугранные углы при основании четырехугольной пирамиды равны между собой. Высота пирамиды равна 12 м, а периметр и площадь основания равны 48 м и 120 м^2. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

1) По условию задачи все двугранные углы при _______________ пирамиды равны, следовательно, ее высота MO проходит через __________ окружности, ____________________ в основание, а все высоты боковых __________, проведенные к сторонам основания, __________ между собой. Поэтому если h — высота боковой грани, проведенная из вершины M, то

$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}AB \cdot h + \frac{1}{2}\_\_\_ \cdot h + \_\_\_\_\_\_\_\_\_ +$
$+ \_\_\_\_\_\_\_\_ = \frac{1}{2}(AB + \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)h =$
$= \_\_\_ P_{\text{осн}} \cdot \_\_\_$



2)Пусть $MH \perp AB$, тогда OH ___ AB (по теореме о ______________ перпендикулярах), а значит, OH — радиус __________________, вписанной в четырехугольник ________

3) Площадь S многоугольника, его периметр P и радиус r вписанной в многоугольник окружности связаны формулой $S = \frac{1}{2}\_\_\_ \cdot \_\_\_$, следовательно, $r = 2$ _______ : ___ $= 2 \cdot 120$: _____ = ___ см.

4) В прямоугольном треугольнике MOH $MH = h = \sqrt{OH^2 + \_\_\_\_\_} =$
$= \sqrt{\_\_\_\_\_ + 12^2} = \_\_\_\_$ (м). Следовательно, $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ (м^2).

Ответ. ______________________

85

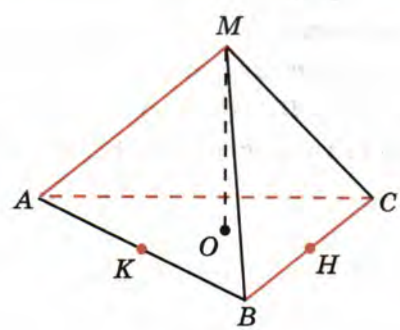
Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 м, а боковое ребро — 4 м. Найдите:

а) площадь боковой поверхности пирамиды;

б) высоту пирамиды;

в) площадь сечения, проходящего через боковое ребро и высоту пирамиды;

г) площадь сечения, проходящего через сторону основания перпендикулярно к противолежащему боковому ребру.



Решение.

а) Площадь боковой поверхности правильной ________________ равна ________________ произведения периметра ________________ на ________________

Апофемой правильной пирамиды называется ____________ боковой грани, проведенная из ________________ пирамиды. Все боковые ребра правильной пирамиды ____________ друг другу, поэтому высота MH треугольника _____ является и ее ________________, т. е. BH = _____

В прямоугольном треугольнике MHC $MH = \sqrt{MC^2 - \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - 3^2} = \sqrt{\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_$ (м). Поэтому $S_{бок} = \_\_\_\_\_ P_{осн} \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot \_\_\_\_\_ \cdot BC \cdot \_\_\_\_\_ = = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_$ (м^2).

б) Проведем высоту MO пирамиды. Так как пирамида __________________, то точка O — __________ основания, и, следовательно, $OH = \_\_\_\_ AH = \frac{1}{3} BC \cdot \frac{\sqrt{3}}{\_\_\_} = \frac{6\sqrt{3}}{\_\_\_} = \_\_\_\_$ (м).

В прямоугольном треугольнике MOH $MO = \sqrt{MH^2 - \_\_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{\_\_\_} = \_\_\_\_$ (м).

в) Пусть плоскость сечения проходит через ___________ ребро MA и высоту пирамиды. Тогда она пересекает плоскость основания по прямой _____, а ребро BC — в его середине — точке ____. Следовательно, пересечением плоскости AMH и грани BMC служит отрезок _____. Поскольку $MO \perp ABC$, то $MO \_\_\_ AH$ (___________________ прямой, перпендикулярной к плоскости).

Итак, $S_{AMH} = \frac{1}{2} AH \cdot \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_ \cdot 3\sqrt{3} \cdot \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_$ (м^2).

г) Пусть искомое сечение содержит ребро AB и перпендикулярно к боковому __________ MC. Тогда прямая MC перпендикулярна к линии пересечения секущей ________________ и грани BMC. Итак, проведем высоту BT треугольника BMC и соединим точки T и A отрезком (выполните построения). Так как $AC \_\_\_ BC$ и $\angle ACM \_\_\_ \angle BCM$ (пирамида ___________________), то $\triangle ACT = \triangle \_\_\_\_\_\_$ (по __________ сторонам и ______________ между ними). Следовательно, $\angle ATC = \angle \_\_\_\_\_\_ = 90°$.

Итак, $MC \_\_\_ BT$ и $MC \_\_\_ AT$, поэтому плоскость ABT __________________________ к ребру MC, т. е. треугольник _______ — искомое сечение пирамиды. Из равенства $\triangle ACT = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$ следует, что $AT \_\_\_ BT$, а потому медиана TK треугольника ABT является и _____________________, т. е. $TK \perp \_\_\_\_\_$. Следовательно, $S_{ACT} = \frac{1}{2} \cdot \_\_\_\_\_ \cdot TK$.

В прямоугольном треугольнике BKT $BK = \_\_\_ AB = \frac{1}{2} \cdot \_\_\_ = \_\_\_$ (м), $KT = \sqrt{BT^2 - \_\_\_\_\_}$. Найдем длину отрезка BT. Так как $S_{BMC} = \frac{1}{2} BC \cdot \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ MC \cdot \_\_\_\_\_$, то $BC \cdot \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ \cdot BT$, откуда получаем $BT = \frac{BC \cdot MH}{\_\_\_\_\_} = \frac{\_\_\_ \cdot \sqrt{7}}{4} = \_\_\_ \sqrt{7}$ (м).

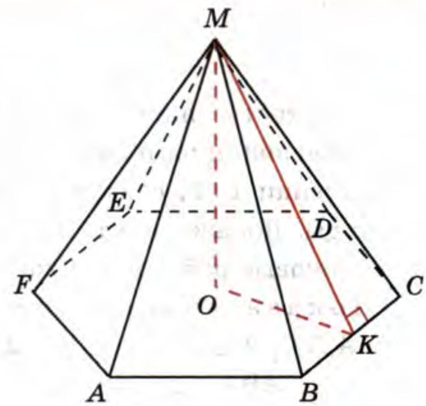
Поэтому $KT = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 - \_\_\_\_} = \frac{\sqrt{\_\_\_\_ - \_\_\_\_}}{2} = \frac{\sqrt{\_\_\_\_}}{\_\_\_\_} = \frac{3}{2}\sqrt{\_\_\_}$ (м).

Следовательно, $S_{ABT} = \_\_\_ \cdot \_\_\_ \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3} = \_\_\_\_$ (м²).

Ответ. а) $S_{бок}$ = ________; б) MO = ________; в) S_{AMH} = ________; г) S_{ABT} = ________________

86

Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно 5 см, а сторона основания — 6 см. Найдите площади ее боковой и полной поверхностей.



Решение.

1) Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна произведению ________________ основания на ________________, т. е. $S_{бок} = \_\_\_ \cdot q$, где $q = MK = \sqrt{\_\_\_\_ - CK^2}$, $CK = \frac{1}{2}\_\_\_\_ =$ $= \_\_\_$ (см).

Итак, $q = \sqrt{\_\_\_ - 3^2} = \sqrt{\_\_\_} = \_\_\_$ (см), $P = 6 \cdot \_\_\_ = \_\_\_\_$ (см), $S_{бок} = \_\_\_\_ \cdot \_\_\_ = \_\_\_\_$ (см²).

2) $S_{полн} = \_\_\_\_\_\_ + S_{осн}$, где $S_{осн} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \_\_\_ \cdot \_\_\_}{2} = \_\_\_\sqrt{3}$ (см²).

Следовательно, $S_{полн} = \_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_$ (см²).

Ответ. $S_{бок}$ = ________, $S_{полн}$ = ________________ см².

87

Все ребра четырехугольной пирамиды равны между собой. Докажите, что пирамида правильная.

Доказательство.

1) Стороны четырехугольника $ABCD$ — основания пирамиды $MABCD$ — ____________ между собой, следовательно, этот четырехугольник является ____________

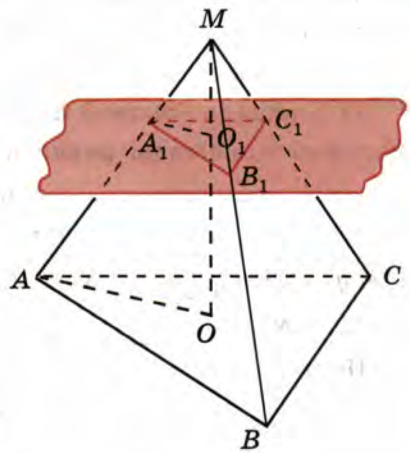
2) Боковые ребра прамиды ____________ между собой, поэтому около ее основания можно описать ________________. Но ромб, вписанный в окружность, является ________________, а точка O пересечения диагоналей является его центром.

3) В треугольнике AMC AM ___ MC, AO ___ OC, следовательно, MO ___ AC. Аналогично в треугольнике BMD MO ___ BD. Поэтому отрезок MO — ______________________________ к плоскости основания пирамиды (_____________________ перпендикулярности прямой и плоскости).

Итак, основание пирамиды — квадрат, т. е. _________________________ четырехугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с _____________ основания, является высотой пирамиды. В соответствии с определением пирамида ___________________________ , что и требовалось доказать.

88

Плоскость, параллельная основанию треугольной пирамиды, делит ее высоту в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Докажите, что эта плоскость делит боковые ребра в том же отношении.



Доказательство. Так как плоскости $A_1B_1C_1$ и ___________ параллельны, то A_1B_1 ___ AB (__________________________ параллельных плоскостей). Аналогично

B_1C_1 ___ BC, A_1C_1 ___ AC и A_1O_1 ___ AO.

Поэтому $\frac{MA_1}{A_1A} = \frac{MO_1}{\_\_\_} = \frac{1}{2}$; $\frac{MB_1}{B_1B} = \frac{MA_1}{\_\_\_}$; $\frac{MC_1}{C_1C} = \frac{MA_1}{\_\_\_}$.

Итак, $\frac{MA_1}{A_1A} = \frac{MB_1}{\_\_\_} = \frac{\_\_\_}{\_\_\_} = \frac{MO_1}{\_\_\_} = \frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

89

Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания 10 см и боковым ребром 13 см пересечена плоскостью, параллельной основанию и проходящей через середину высоты пирамиды.

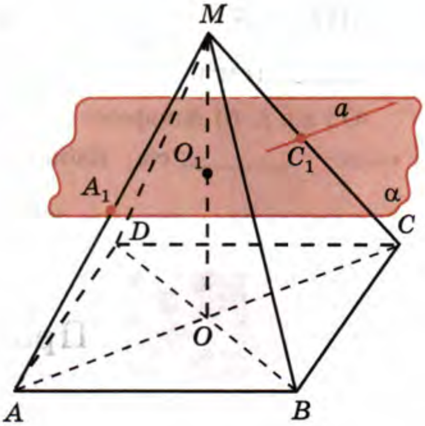
а) Постройте сечение пирамиды данной плоскостью.

б) Найдите апофему, высоту и площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

Решение.

а) Пусть точка O_1 — середина высоты MO, плоскость α — секущая. Так как α ___ ABC, то плоскость AMC пересекает плоскости ABC и α по ____________________________ прямым AC и a. Проведем прямую a и обозначим точки ее пересечения с ребрами MC и ____ через C_1 и A_1.

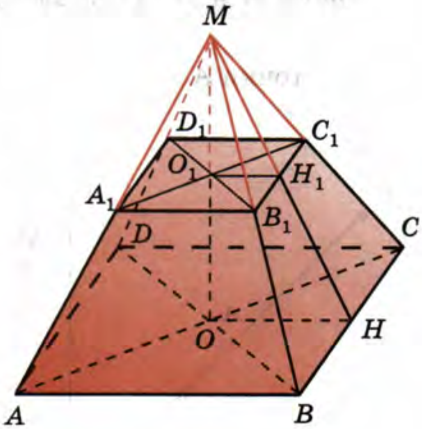
Аналогично плоскость MBD пересекает плоскости ABC и α по ____________ ____________________ прямым ______ и B_1D_1 ($B_1 \in MB$, $D_1 \in MD$). Соединим точки A_1, B_1, C_1 и D_1 последовательно отрезками и получим четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — искомое ____________ пирамиды.



б) Проведем в грани MBC апофему MH пирамиды $MABCD$. Тогда H_1H — ______________ усеченной пирамиды $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Так как плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC ______________________________, то $O_1H_1 \parallel$ ________ . Но $MO_1 = O_1O$, следовательно, MH_1 ____ H_1H.

В треугольнике MHC катет $MH = \sqrt{MC^2 - \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_ - 5^2} = \sqrt{\_\_\_\_} =$ ____ (см). Поэтому $H_1H =$ ____ $MH = \frac{1}{2}$ ____ $=$ ____ (см).

В треугольнике MOH $O_1O =$ ____ $MO = \frac{1}{2}\sqrt{MH^2 - \_\_\_\_\_} = \_\_\_\sqrt{12^2 - \_\_\_\_} = \_\_\_\sqrt{\_\_\_\_}$ (см).



Площадь боковой ________________________ правильной усеченной ________________ равна произведению ________________ периметров ____________________ на ________________. Периметр основания $ABCD$ равен ____ $BC = 4 \cdot$ _____ $=$ _____ (см).

Найдем периметр основания $A_1B_1C_1D_1$.

Плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC ______________________, следовательно, плоскость MBC пересекает их по ________________________________ прямым, т. е. B_1C_1 ____ BC. Так как MH_1 ____ H_1H, то B_1C_1 — средняя ____________ треугольника MBC, поэтому $B_1C_1 =$ ____ BC. Следовательно, периметр четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ равен половине ____________________________ четырехугольника $ABCD$, т. е. $P_1 = \frac{1}{2}P$ или $P_1 =$ _____ $\cdot 40 =$ _____ (см).

Итак, $S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + \_\_\_) \cdot H_1H = \frac{1}{2}(\_\_\_\_ + \_\_\_\_) \cdot \_\_\_ = \frac{1}{2}\_\_\_\_ \cdot \_\_\_ =$
$= \_\_\_\_\_$ (см^2).

Ответ. б) Апофема ______________ пирамиды равна ___ см, высота — ______ см, площадь __________ поверхности — ______ (см^2).

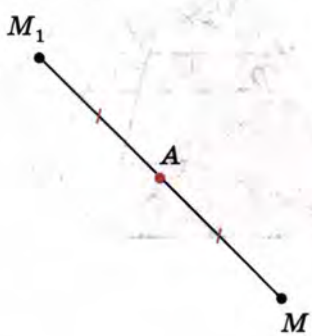
§ 3 Правильные многогранники

90

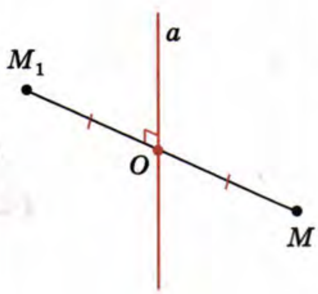
Заполните пропуски.

Точки M и M_1 называются симметричными относительно:

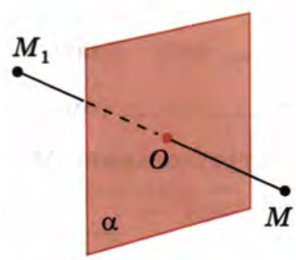
точки A



______________ a



______________ α



если:

точка A — __________ отрезка MM_1.

Точка A считается ______________ самой себе.

прямая a проходит через __________ отрезка MM_1 и ______ ______________ к нему.

__________ точка прямой a считается ______________ самой себе.

______________ α проходит через ______ __________ отрезка MM_1 и __________ ______________

Каждая __________ __________ α считается ______________ ______________

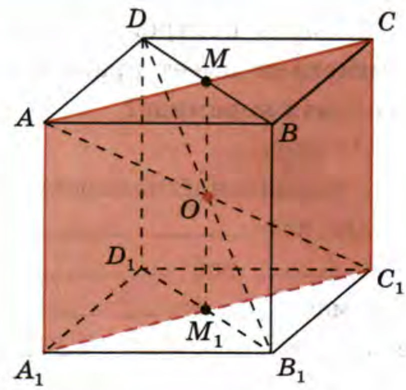
91

Диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке O. Найдите вершину, симметричную вершине D относительно:

а) точки O;

б) прямой AC;

в) плоскости ACC_1.



Решение.

а) Точка O является ______________ отрезка DB_1, следовательно, вершины D и ______ симметричны относительно __________ O.

б) Диагонали квадрата $ABCD$ взаимно ____________________ и делятся точкой пересечения ______________. Следовательно, прямая AC проходит через середину отрезка BD и ____________________ к нему, т. е. точки D и B ____________________ относительно ______________ AC.

в) Так как $AA_1 \perp ABD$, то AA_1 ___ BD (определение прямой, ____________________ к плоскости). Кроме того, BD ___ AC. Таким образом, прямая BD перпендикулярна к двум ______________ прямым (AA_1 и AC) плоскости ________, поэтому BD ___ ACC_1 (признак перпендикулярности ____________ и плоскости). Прямая AC пересекает отрезок BD в его ____________. Следовательно, плоскость ACC_1 проходит через ______________ отрезка BD и перпендикулярна к нему, поэтому точки B и D ____________________ относительно плоскости ACC_1.

Ответ. а) Вершина ______; б) вершина ______; в) вершина ______

92

Заполните пропуски:

а) Точка называется ______________ симметрии фигуры, если ____________ точка фигуры ____________________ относительно нее некоторой точке той же ____________

б) Прямая называется осью ____________________ фигуры, если каждая точка фигуры симметрична ____________________ нее некоторой ____________ той же фигуры.

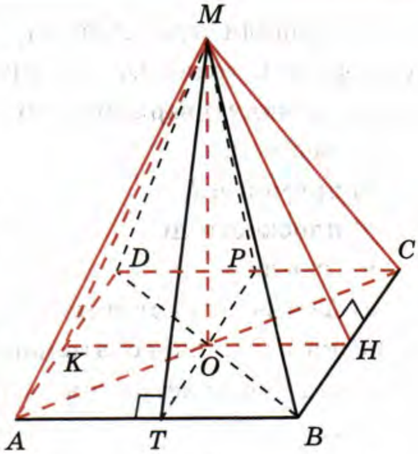
в) Плоскость называется ____________________ симметрии фигуры, если ____ относительно нее ____ фигуры.

93

Сколько центров, осей и плоскостей симметрии имеет правильная четырехугольная пирамида?

О т в е т.

У правильной четырехугольной пирамиды нет ______________ симметрии; __________ ось ______________ (прямая _____); ____________ плоскости симметрии (KMH, __________, AMC и __________).



94

Заполните пропуски в определении правильного многогранника:

Выпуклый ______________________ называется правильным, если _______ его грани — ________________ многоугольники, и в ______________ его ______________ сходится одно и то же число ______________

95

Докажите, что куб является правильным многогранником.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

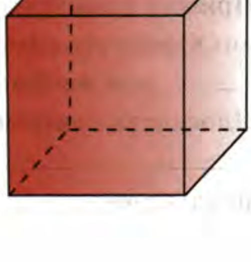
Проверим, обладает ли куб всеми признаками правильного ______________________, указанными в определении.

1) Куб ______________ выпуклым многогранником.

2) Каждая грань куба — ____________, т. е. ______________________ многоугольник, и все грани ____________ между собой.

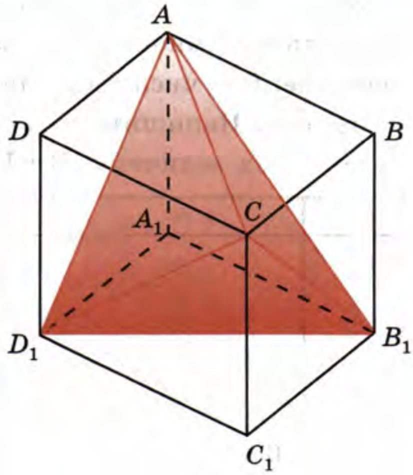
3) В ______________ вершине куба сходится ______________________ число ребер, а именно ___ ребра.

Итак, у куба ______________ все признаки, указанные в определении ______________________ многогранника. Следовательно, куб ______________________ правильным ______________________, что и требовалось доказать.



96

Вершины A, C, B_1 и D_1 куба соединены попарно отрезками. Докажите, что многогранник ACB_1D_1 является правильным.



Доказательство.

1) Получившийся многогранник ACB_1D_1 — тетраэдр, а известно, что тетраэдр ________________ выпуклым многогранником.

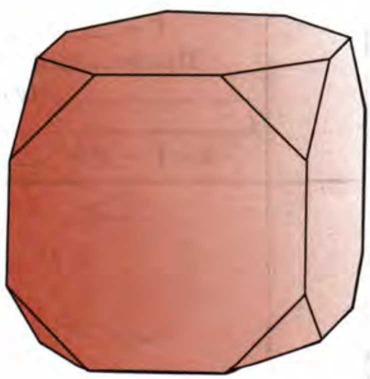
2) Все ребра многогранника ACB_1D_1 являются ____________________ граней куба, следовательно, они __________ между собой, а потому все грани многогранника ACB_1D_1 являются правильными ______________________________

3) В каждой вершине ____________________ ACB_1D_1 сходится ____________________ количество __________, а именно ___ ребра.

Итак, у тетраэдра ACB_1D_1 ____________ все признаки правильного многогранника, следовательно, этот тетраэдр — ____________ многогранник.

97

От куба отсечены 8 тетраэдров так, что все грани получившегося многогранника — правильные многоугольники. Является ли этот многогранник правильным?



Решение. Проверим наличие признаков, указанных в определении правильного ________________________

1) Данный многогранник ____________ ________ выпуклым.

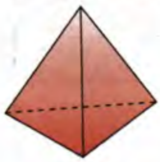
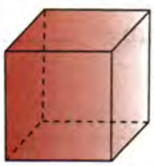
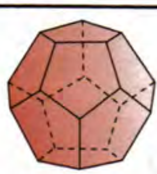
2) В каждой вершине сходится ____________________ число ребер (___ ребра).

3) Все грани — правильные ____________________, но не все они равны друг другу: треугольник ____________ восьмиугольнику.

Следовательно, данный многогранник ________________ правильным.

98

Запишите в таблицу значения параметров: n — число сторон грани правильного многогранника; k — число ребер, сходящихся в одной вершине; В — число вершин многогранника; Р — число ребер; Г — число граней. Напишите названия многогранников. Вычислите для каждого из них величину В + Г − Р.

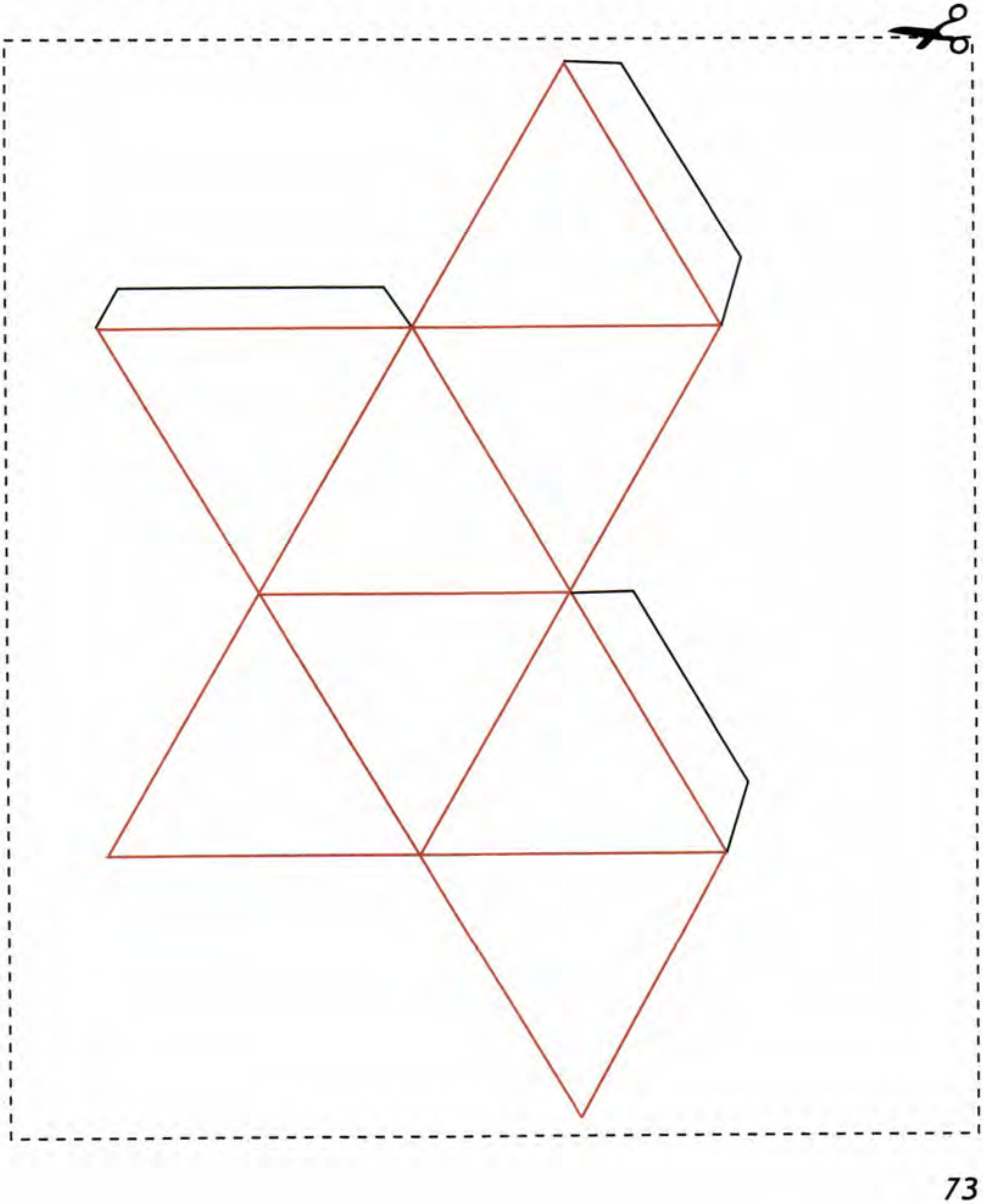
	k = ___	k = ___	k = ___
n = ___	 В = ___ , Р = ___ , Г = ___ Правильный тетраэдр (четырехгранник) В + Г − Р = ___	 В = ___ , Р = ___ , Г = ___ Правильный ______________ (______________) В + Г − Р = ___	 В = ___ , Р = ___ , Г = ___ ______________ ______________ (______________) В + Г − Р = ___
n = ___	 В = ___ , Р = ___ , Г = ___ Правильный ______________ (куб) (______________) В + Г − Р = ___	Такой правильный ______________ не существует	Такой правильный ______________ ______________
n = ___	 В = ___ , Р = ___ , Г = ___ ______________ ______________ (______________) В + Г − Р = ___	Такой правильный ______________ ______________	______________ ______________ ______________

99

а) Дорисуйте на развертке правильного октаэдра клапаны для склеивания, добавляя их через одно ребро. Вырежите развертку и склейте модель многогранника.

б) Измерьте длину ребра и вычислите площадь поверхности правильного октаэдра.

Ответ. б) ______ см^2.

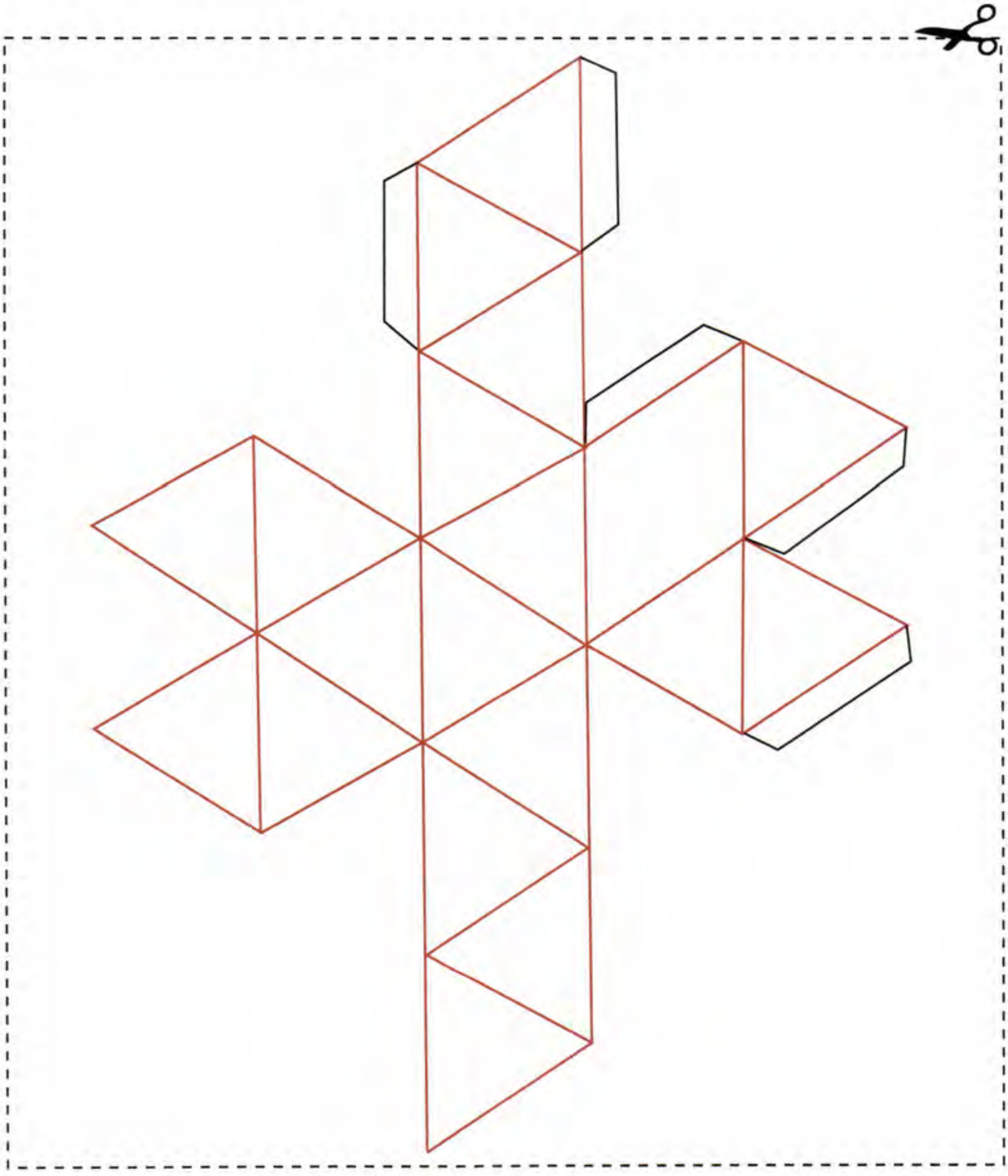


100

а) Дорисуйте на развертке правильного икосаэдра клапаны для склеивания, добавляя их через одно ребро. Вырежите развертку и склейте модель многогранника.

б) Измерьте длину ребра и вычислите площадь поверхности правильного икосаэдра.

Ответ. б) ________ см^2.

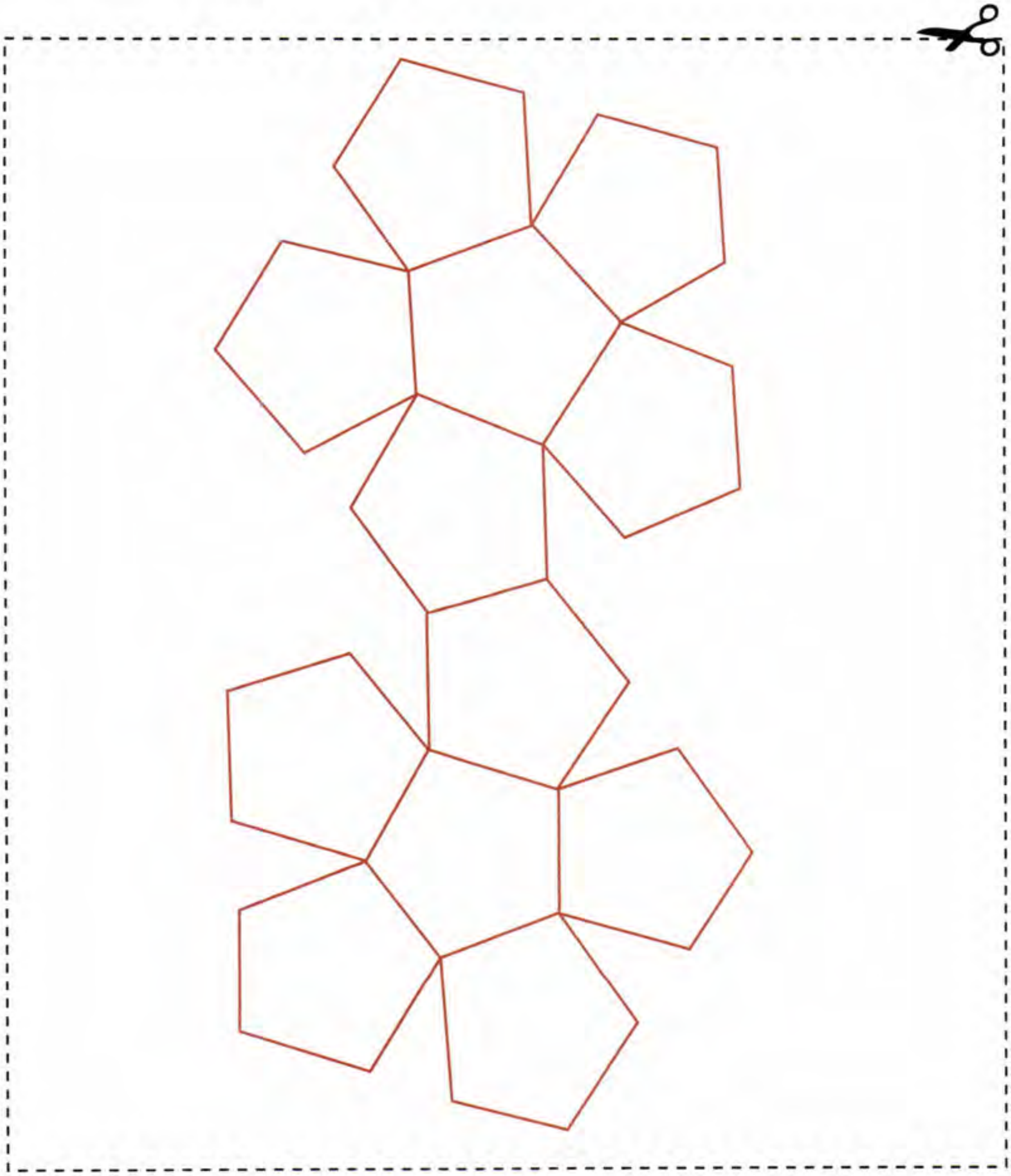


101

а) Дорисуйте на развертке правильного додекаэдра клапаны для склеивания, добавляя их через одно ребро. Вырежите развертку и склейте модель многогранника.

б) Измерьте длину ребра и вычислите площадь поверхности правильного додекаэдра.

Ответ. б) _______ см^2.

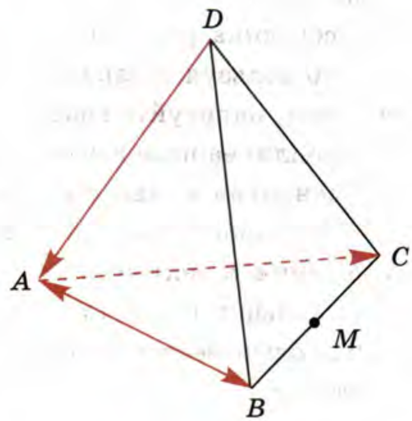


Глава IV

Векторы в пространстве

§ 1 Понятие вектора в пространстве

102



Точка M — середина ребра BC правильного тетраэдра $DABC$.

а) Началом каких ненулевых векторов, изображенных на рисунке, служит точка A?

б) Концом каких данных ненулевых векторов служит точка A?

в) Как называется и обозначается вектор с концом и началом в точке C?

г) Нарисуйте цветным карандашом векторы $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AM}$.

д) Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AM}$, если $|\overrightarrow{DA}| = 2$.

Ответ. а) $\overrightarrow{AB}$, ______ ; б) ______________ ; в) вектор с началом и ____________ в точке C называется ______________ и обозначается _____ или ___ ; д) $|\overrightarrow{AB}|$ = ___ , |_____| = _____ , ______________________________

103

Заполните пропуски:

а) Два ненулевых ______________ называются коллинеарными, если они лежат на одной ____________ или на ______________________________ прямых (обозначение: $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$).

б) Два ненулевых ______________ $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{KM}$ называются сонаправленными, если они ____________________ и лучи BC и _____ сонаправлены (обозначение: $\overrightarrow{BC}$ ___ $\overrightarrow{KM}$).

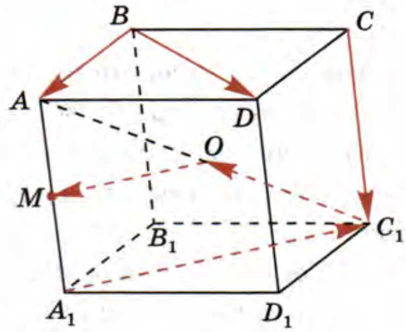
в) Два ненулевых вектора $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{PT}$ называются противоположно ______________________________ , если они ______________________ и лучи CE и PT ____ направлены (обозначение: $\overrightarrow{CE}$ ___ $\overrightarrow{PT}$).

г) Нулевой вектор считается сонаправленным с ______________ вектором.

д) Векторы называются равными, если они ______________ и их длины __________, т. е. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, если $\overrightarrow{AB}$ ___ $\overrightarrow{CD}$ и $|\overrightarrow{AB}|$ ________

104

Точка O — середина диагонали AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка M — середина ребра AA_1.



1) Используя обозначенные на рисунке точки, нарисуйте векторы:

а) коллинеарные вектору $\overrightarrow{BD}$;

б) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{BA}$;

в) противоположно направленные по отношению к вектору $\overrightarrow{OM}$;

г) равные вектору $\overrightarrow{CC_1}$.

2) Сколько векторов, равных вектору $\overrightarrow{C_1O}$, можно отложить от точки O?

Ответ.

1) а) _____, _____, _____; б) _____, _____, _____; в) _____, _____; г) _____, _____, _____

2) От точки O можно отложить только ______________, ______________ вектору $\overrightarrow{C_1O}$.

105

Измерения прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 3 м, 4 м и 12 м. Найдите длину векторов: а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{C_1A}$; в) $\overrightarrow{A_1C}$.

Решение.

а) Длина вектора $\overrightarrow{AC_1}$ — это длина ______________ AC_1. Отрезок AC_1 является ______________ прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, следовательно, $AC_1 = \sqrt{3^2 + \_\_\_\_\_} = \sqrt{\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\_$ (см), т. е. $|\overrightarrow{AC_1}| = \_\_\_\_\_$ см.

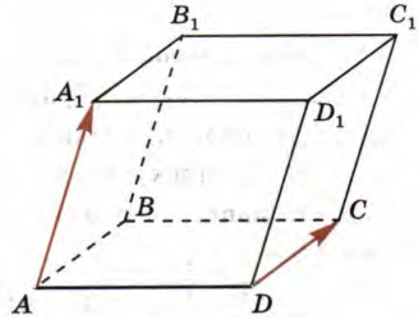
б) Вектор $\overrightarrow{C_1A}$ является ______________ вектору $\overrightarrow{AC_1}$, следовательно, их __________ равны, т. е. $|\overrightarrow{C_1A}| = |\_\_\_\_\_| = \_\_\_\_\_$ (см).

в) Длина вектора $\overrightarrow{A_1C}$ равна __________ диагонали A_1C. Диагонали прямоугольного ______________ равны, значит, $|\overrightarrow{A_1C}| = \_\_\_\_\_$ см.

Ответ. а) $|\overrightarrow{AC_1}| = \_\_\_\_\_$ см; б) $|\overrightarrow{C_1A}| = \_\_\_\_\_$ см; в) $|\overrightarrow{A_1C}| = \_\_\_\_\_$ см.

§ 2 Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число

106



Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Постройте вектор, начало и конец которого являются вершинами параллелепипеда, равный сумме векторов: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

2) Сравните суммы векторов $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA_1}$.

Решение.

1) Для построения суммы ________ используем правило треугольника.

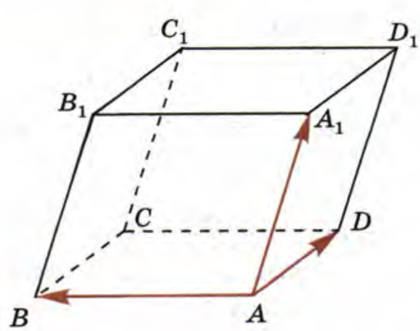
а) От конца вектора $\overrightarrow{AA_1}$ — точки ____ — отложим вектор _____, равный вектору $\overrightarrow{DC}$. Суммой векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ является вектор _____ (изобразите его на рисунке). Итак, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AA_1} +$ _____ $=$ _____

б) Откладывая от конца вектора $\overrightarrow{DC}$ вектор _____, равный вектору _____, получаем: $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DC}+$ _____ $=$ _____ (изобразите этот вектор на рисунке).

2) Начала и концы полученных векторов _______ и _______ служат вершинами четырехугольника ADC_1B_1, который является ______________________________ . Следовательно, $AB_1 =$ _____ и лучи AB_1 и _____ сонаправлены, а значит, $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1}$.

Итак, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DC} =$ _____ $+ \overrightarrow{AA_1}$.

107



Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}$.

Решение.

Первый способ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} +$ _____ $) + \overrightarrow{AD}$ (________________ закон). Так как грань ABB_1A_1 является ________________________, то по правилу параллелограмма получаем:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=$ ______ . Четырехугольник AB_1C_1D — ______________________
______________, следовательно, по правилу ______________________
$\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AD}=$ ______

Итак, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=(\underline{\quad\quad}+\overrightarrow{AA_1})+\underline{\quad\quad}=\underline{\quad\quad}+\overrightarrow{AD}=\underline{\quad\quad}$

Второй способ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{AA_1}+\underline{\quad\quad})$ (______________
______________ закон). Грань AA_1D_1D — ______________________,
следовательно, по правилу ______________________ $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=$
$=$ ______ . Четырехугольник AD_1C_1B — ______________________,
следовательно, по правилу ______________________
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}=$ ______

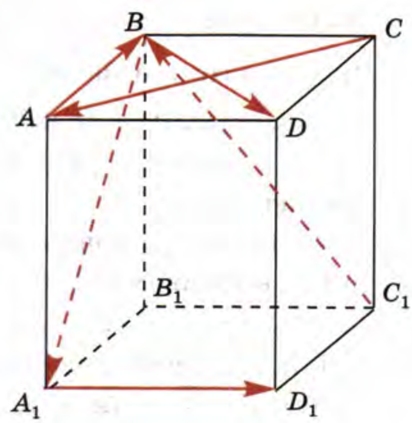
Итак, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\underline{\quad\quad})+\underline{\quad\quad}=\overrightarrow{AB}+(\underline{\quad\quad}+\overrightarrow{AD})=\underline{\quad\quad}$

Ответ. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=$ ______

108

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{C_1B}.$$

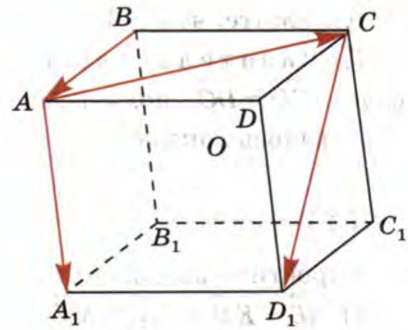


Доказательство.	Обоснование.
1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}=$	______________ закон
$=(\overrightarrow{AB}+\underline{\quad\quad})+\overrightarrow{BD}=$	______________ закон
$=(\overrightarrow{CA}+\underline{\quad\quad})+\overrightarrow{BD}=$	______ треугольника
$=\underline{\quad\quad}+\overrightarrow{BD}=$	правило ______________
$=\underline{\quad\quad}$	
2) $\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{C_1B}=$	______________ закон
$=\overrightarrow{A_1D_1}+(\overrightarrow{BA_1}+\underline{\quad\quad})=$	______________ закон
$=\overrightarrow{A_1D_1}+(\overrightarrow{C_1B}+\underline{\quad\quad})=$	______________ закон
$=\overrightarrow{A_1D_1}+\underline{\quad\quad}=$	______ треугольника
$=\underline{\quad\quad}+\overrightarrow{A_1D_1}=$	правило ______________
$=\underline{\quad\quad}$	

Грань CDD_1C_1 параллелепипеда является ______________________
______________________, следовательно, $\overrightarrow{CD}$ ____ $\overrightarrow{C_1D_1}$. Поэтому $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+$
$+\underline{\quad\quad}=\overrightarrow{A_1D_1}+\underline{\quad\quad}+\overrightarrow{C_1B}$, что и требовалось доказать.

109

Какие векторы с концом и началом в вершинах параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$:



а) противоположны вектору $\overrightarrow{AC}$;

б) равны вектору $-\overrightarrow{CD_1}$;

в) равны разности $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}$;

г) равны сумме $\overrightarrow{BA}+(-\overrightarrow{CD_1})$;

д) равны вектору $-\overrightarrow{CD_1}-\overrightarrow{AC}$?

Решение.

а) Два ненулевых ______________ называются противоположными, если их длины ___________ и они _________________________ направлены. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AC =$ ______ . Противоположно направлены по отношению к лучу AC лучи _____ и ______

Следовательно, вектору $\overrightarrow{AC}$ противоположны векторы ______ и ______

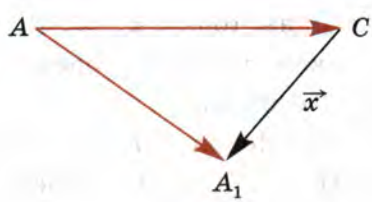
б) Запись $-\overrightarrow{CD_1}$ означает вектор, ___________________________________ вектору $\overrightarrow{CD_1}$. Равными этому вектору являются векторы ______ и ______

в) Разность векторов $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}$ можно найти двумя способами:

1) по определению разности двух ______________

2) используя формулу $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+($___$)$.

1) По определению разностью векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ является такой ______________ $\vec{x}$, сумма которого с вектором ______ равна вектору ______ , т. е. $\overrightarrow{AC}+$ ____ $=$ _____ . Значит, искомый вектор $\vec{x}$ — это вектор ______ , т. е. $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}=$ ______



2) Используя формулу $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+($________$)$, получаем: $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}=$ $=\overrightarrow{AA_1}+(-$______$)$. Но вектор $-\overrightarrow{AC}$ — это вектор, _____________________ ________________ вектору _____ , т. е. вектор _____ . Поэтому $\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AC}=$ $=\overrightarrow{AA_1}+$ _____ $=\overrightarrow{CA}+$ _____ $=$ _____

г) Как установлено в п. «б», $-\overrightarrow{CD_1}=$ _____ и также $-\overrightarrow{CD_1}=$ _____ . Следовательно, $\overrightarrow{BA}+(-\overrightarrow{CD_1})=\overrightarrow{BA}+$ _____ $=$ _____ (по ____________________ треугольника). Этому вектору равны векторы $\overrightarrow{B_1B}$, _____ и _____

д) Используя результаты п. «а» и «б», получаем: $-\overrightarrow{CD_1}-\overrightarrow{AC}=$ $=$ ____ $+(-$ ____$)=$ ____ $+$ ____ $=$ ____ . Этот вектор равен вектору _____

Ответ. а) _____ , _____ ; б) _____ , _____ ; в) _____ ; г) _____ , _____ , _____ , _____ ; д) _____ , _____

110

Докажите, что $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

Доказательство. Используя формулу $\vec{a}-\vec{b}=$ ___ $+(-\vec{b})$ и равенство $-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$, получаем: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(-$ _____ $)=\overrightarrow{AB}+$ _____ , что и требовалось доказать.

111

Упростите выражение:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OK}$;

б) $\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CA}$.

Решение.

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{KB}+$ _____ $-\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{MC}+$ _____ $-\overrightarrow{OK}=$ _____ $+$ $+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}+(-$ _____ $)=\overrightarrow{AK}+$ _____ $+$ _____ $=\overrightarrow{AK}+$ _____ $+\overrightarrow{OC}=$ $=\overrightarrow{AO}+$ _____ $=$ _____

б) $\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{PM}-$ _____ $-\overrightarrow{CA}+$ _____ $=$ $=\overrightarrow{KM}+$ _____ $+\overrightarrow{PA}+$ _____ $+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{KP}+$ _____ $+\overrightarrow{CE}=$ _____ $+$ _____ $=$ $=$ _____

Ответ. а) _____ ; б) _____

112

Даны точки K, M, P, O. Представьте вектор $\overrightarrow{KM}$ в виде алгебраической суммы векторов: а) $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{OP}$; б) $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{PO}$.

Решение.

а) Используя равенства $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{PO}+$ _____ , $\overrightarrow{PO}=-$ _____ , $\overrightarrow{OM}=-$ _____ , получаем: $\overrightarrow{KM}=$ _____ $-$ _____ $-$ _____

б) $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KO}+$ _____ $+$ _____ $=-$ _____ $-$ _____ $+$ _____

Ответ.

а) $\overrightarrow{KM}=$ ____________________ ; б) $\overrightarrow{KM}=$ ____________________

113

Заполните пропуски:

Произведением ________________ вектора $\vec{a}$ на ___________ k называется ______________ $\vec{b}$, такой, что $|\vec{b}|=|$___$|\cdot|$___$|$, причем $\vec{b}\uparrow\uparrow$___ при $k\geqslant 0$ и $\vec{b}$ ___ $\vec{a}$ при $k<0$.

Произведением нулевого ______________ на ______________ число считается ______________ вектор.

114

Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства:

а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;

б) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

Доказательство.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то обе части каждого равенства — нулевые ________, поэтому равенства справедливы. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$.

а) По определению произведения вектора на ________ $|1 \cdot \vec{a}| = |\_\_\_| \cdot |\_\_\_| = |\_\_\_|$, а так как $1 > 0$, то векторы $1 \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ ____________________. Следовательно, по определению равных векторов $1 \cdot \vec{a}$ ___ $\vec{a}$.

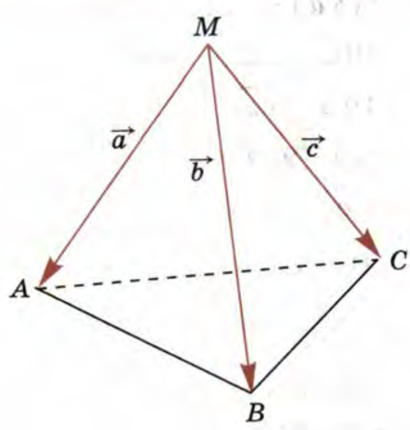
б) По определению ____________ вектора на число $|(-1) \cdot \vec{a}| = |\_\_\_| \cdot |\_\_\_| = \_\_\_ \cdot |\_\_\_| = |\vec{a}|$, а так как -1 ___ 0, то $(-1) \cdot \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Следовательно, векторы $(-1) \cdot \vec{a}$ и ___ противоположны, т. е. $(-1) \cdot \vec{a}$ ___ $-\vec{a}$.

115

Дана треугольная пирамида $MABC$, $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$.

а) Отложите от точки M вектор: $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b}$; $\vec{y} = \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

б) Отложите от точки A вектор $\vec{n} = -\frac{2}{3}\vec{m}$.



Решение.

а) Так как $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{b}$, то по определению произведения вектора на ________ $\vec{x} \uparrow\uparrow$ ___ и $|\vec{x}| = \_\_\_ |\vec{b}|$. Отметим середину ребра MB — точку E, тогда $\overrightarrow{ME} = \_\_\_ \vec{b} = \vec{x}$. Аналогично отметим точку H — ____________ ребра MC, тогда $\overrightarrow{MH} = \_\_\_ \vec{c} = \_\_\_\_$

Так как $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\_\_\_$, то $\vec{z} = \overrightarrow{ME} + \_\_\_$. Построим вектор $\vec{z}$ по ____________ параллелограмма. Для этого через точку E проведем ____________, параллельную прямой MC, а через точку H — прямую,

____________ прямой ____. По теореме ________ эти прямые пересекут отрезок BC в его ________. Обозначим эту точку буквой K. Тогда $\vec{z}$ = ____

$\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\underline{\quad} = \vec{a} - (\frac{1}{2}\vec{b}\underline{\quad}\frac{1}{2}\vec{c})$ — первый ____________

________ закон. Но $\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\underline{\quad} = \vec{z} = \overrightarrow{MK}$, $\vec{a} = \underline{\qquad}$, следовательно,

$\vec{m} = \underline{\qquad} - \underline{\qquad}$, т. е. $\overrightarrow{MA} = \underline{\qquad} + \vec{m}$. Поэтому $\vec{m} = \underline{\qquad}$

б) Так как $\vec{n} = -\frac{2}{3}\underline{\quad}$ и $-\frac{2}{3}\underline{\quad}0$, то $\vec{n}\underline{\quad}\vec{m}$ и $|\vec{n}| = \underline{\quad}|\vec{m}|$. Отложим от точки A вектор $\vec{n}$. Для этого на отрезке AK нужно отметить точку O так, чтобы $AO = \underline{\quad}AK$. Тогда $\overrightarrow{AO} = \underline{\quad}\overrightarrow{AK} = \underline{\quad}\vec{m} = \vec{n}$.

116

Упростите выражение $2(5\vec{a} - 3\vec{c}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{c})$.

Решение.

$2(5\vec{a} - \underline{\qquad}) - 3(\underline{\qquad\qquad}) =$

$= 2(5\vec{a}) - \underline{\qquad} - 3(3\vec{a})\underline{\qquad} =$

$= 10\vec{a} - \underline{\qquad} - 9\vec{a}\ \underline{\qquad\qquad} =$

$= 10\vec{a} - 9\vec{a} - \underline{\qquad\qquad} =$

$= (10 - 9)\vec{a} - \underline{\qquad\qquad} =$

$= 1\vec{a} - \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

Ответ. ____

Обоснование.

________ распределительный закон

____________________ закон

____________________ и переместительный законы сложения

____________________ закон

117

Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Доказательство. Возможны два случая: 1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и 2) $\vec{a}\underline{\quad}\vec{b}$. В обоих случаях векторы лежат на одной прямой или на ____________________ прямых, т. е. лежат в одной плоскости.

1) Пусть $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Возьмем число $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Тогда $|k\vec{a}| = |\underline{\quad}| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\underline{\quad}| = |\vec{b}|$. Так как $k\underline{\quad}0$, то $k\vec{a} \uparrow\uparrow \underline{\quad}$. Следовательно, $\vec{b}\underline{\quad}k\vec{a}$.

Итак, для первого случая утверждение доказано.

2) Пусть $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Возьмем число $k = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\underline{\qquad}|}$. Тогда $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\underline{\qquad}| = \dfrac{|\underline{\qquad}|}{|\vec{a}|} \cdot |\underline{\qquad}| = |\underline{\qquad}|$. Так как $k <$ ____ , то $k\vec{a}$ ____ $\vec{a}$, и поэтому $k\vec{a}$ ____ $\vec{b}$.

Итак, $|\vec{b}|$ ____ $|k\vec{a}|$ и $\vec{b} \uparrow\uparrow$ ____ , следовательно, $\vec{b}$ ____ $k\vec{a}$, что и требовалось доказать.

118

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, $\vec{c} \neq \vec{0}$. Докажите, что коллинеарны векторы $\vec{a} - 2\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Доказательство. По условию задачи векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ ________________ , причем $\vec{c} \neq$ ____ , поэтому найдется число k, такое, что $\vec{a} =$ ____ $\vec{c}$ (см. задание 117). Аналогично найдется число m, такое, что $\vec{b} = m$ ____

Поэтому $\vec{a} - 2\vec{b} = k$ ____ $- 2($____ $\vec{c}) = k\vec{c} - ($______$)\vec{c} = ($____ $-$ ______$)\vec{c}$, т. е. вектор $\vec{a} - 2\vec{b}$ равен произведению вектора $\vec{c}$ на число ________ . Следовательно, по определению ________________ вектора на число эти векторы ____________________ , что и требовалось ____________

119

Докажите следующее утверждение:

Если точка M — середина отрезка AB и точка O — произвольная точка пространства, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

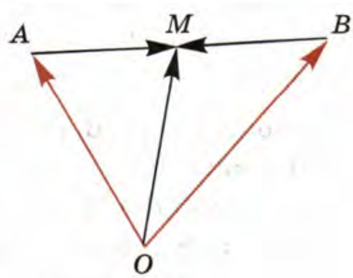
Доказательство. Так как точка M — ____________ отрезка AB, то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ ________________________________ , т. е. $\overrightarrow{AM} = -$ ____ , и, значит, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} =$ ____

Для точек A, M и произвольной точки O по правилу треугольника получаем:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \underline{\qquad}, \tag{1}$$

а для точек B, M и O получаем:

$$\overrightarrow{OM} = \underline{\qquad} + \overrightarrow{BM}. \tag{2}$$



Сложим равенства (1) и (2):

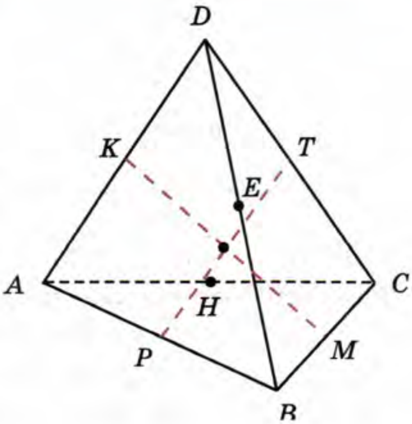
$\overrightarrow{OM} +$ ____ $= \overrightarrow{OA} +$ ____ $+ \overrightarrow{OB} +$ ____ .

Отсюда следует: $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} +$ ____ $+ \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} =$ ____ $+ \overrightarrow{OB} + \vec{0}$.

Итак, $2\overrightarrow{OM} =$ ____ $+$ ____ , поэтому $\overrightarrow{OM} =$ ____________________ , что и требовалось доказать.

120

Докажите, что три отрезка, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.



Доказательство. Пусть точка K — середина ребра AD тетраэдра $ABCD$, тогда для любой ________ X пространства выполняется равенство $\overrightarrow{XK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{XA}+\underline{\qquad}\,\overrightarrow{XD}$ (см. задание 119). Если точка M — середина ребра BC, то $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\underline{\qquad}+\underline{\qquad}$. Обозначим буквой Q середину отрезка KM, тогда $\overrightarrow{XQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{XK}+\frac{1}{2}\underline{\qquad}=\frac{1}{2}(\underline{\qquad}+\overrightarrow{XM})=\frac{1}{2}((\frac{1}{2}\overrightarrow{XA}+\frac{1}{2}\underline{\qquad})+(\underline{\qquad}+\frac{1}{2}\overrightarrow{XC}))=$
$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\underline{\qquad}+\overrightarrow{XD})$.

Обозначим буквами P, T и O середины отрезков AB, ______ и PT. Тогда $\overrightarrow{XP}=\underline{\qquad\qquad\qquad}$, $\overrightarrow{XT}=\underline{\qquad\qquad\qquad}$, $\overrightarrow{XO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XP}+\underline{\qquad})=$
$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\underline{\qquad})+\frac{1}{2}(\underline{\qquad\qquad\qquad}))=\frac{1}{4}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\underline{\qquad}+\underline{\qquad})$.

Обозначим буквами E, H и F середины отрезков BD, AC и EH. Тогда получим: $\overrightarrow{XE}=\underline{\qquad\qquad\qquad}$, $\overrightarrow{XH}=\underline{\qquad\qquad\qquad}$, $\overrightarrow{XF}=\underline{\qquad\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}=$
$=\frac{1}{\underline{\quad}}(\overrightarrow{XA}+\underline{\qquad\qquad}+\overrightarrow{XD})$.

Сравнив полученные выражения для векторов $\overrightarrow{XQ}$, $\overrightarrow{XO}$ и $\overrightarrow{XF}$, делаем вывод: $\overrightarrow{XQ}=\underline{\qquad}=\underline{\qquad}$. Так как начала этих равных векторов совпадают, то ____________________ и их концы. Следовательно, середины отрезков KM, PT и ______ совпадают, т. е. эти отрезки ________________________ в одной точке и делятся этой точкой ____________, что и требовалось ____________

121

Дано: $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MB}$ $(k\neq-1)$.

Докажите, что:

а) точки A, B и M лежат на одной прямой;

б) для любой точки X пространства верно равенство $\overrightarrow{XM}=\frac{\overrightarrow{XA}+k\overrightarrow{XB}}{1+k}$ (задача 349 учебника).

Доказательство.

а) Так как $\overrightarrow{AM} = k$ ______ , то векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ ______________________ (по определению ______________________ вектора на число). Следовательно, прямые AM и MB либо параллельны, либо ____________________ . Поскольку эти прямые имеют общую __________ M, то они ______________________ , следовательно, точки A, B и M лежат на ______________________________

б) Возьмем произвольную точку X пространства и представим векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ в виде разности векторов с началом в точке X: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{XM} - \underline{\qquad}$, $\overrightarrow{MB} = \underline{\qquad} - \overrightarrow{XM}$.

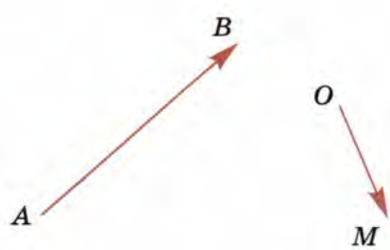
Подставим в исходное равенство полученные выражения: $\overrightarrow{XM} - \underline{\qquad} = k(\overrightarrow{XB} - \underline{\qquad})$, или $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = k\overrightarrow{XB} - \underline{\qquad\quad}$

После переноса слагаемых $\overrightarrow{XA}$ и $k\overrightarrow{XM}$ из одной части равенства в другую получим: $\overrightarrow{XM} + \underline{\qquad\quad} = \overrightarrow{XA} + k\underline{\qquad}$, или $(1+k)\overrightarrow{XM} = \underline{\qquad} + k\overrightarrow{XB}$. По условию задачи $k \neq -1$, следовательно, $1 + k \underline{\quad} 0$. Поэтому обе части _______________ можно умножить на число $\frac{1}{1+k}$.

Получим: $\overrightarrow{XM} = \dfrac{\overrightarrow{XA} + \underline{\qquad\quad}}{1+k}$, что и требовалось доказать.

§ 3 Компланарные векторы

122



Докажите, что компланарны:

а) любые два вектора;

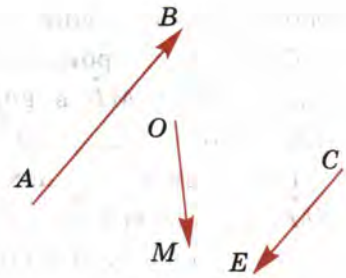
б) любые три вектора, два из которых коллинеарны.

Доказательство.

а) Векторы называются компланарными, если при ______________________ их от одной и той же ____________ они будут лежать в __________ плоскости. Рассмотрим два произвольных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OM}$. От любой точки пространства ____________ отложить вектор, равный данному ______________ . Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AH}$, равный ______________ $\overrightarrow{OM}$

(выполните построение). Через любые три точки проходит ______________, следовательно, векторы $\overrightarrow{AH}$ и _____ лежат в одной ______________, поэтому векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{AB}$ ______________________, что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{OM}$, два из которых, например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CE}$, коллинеарны. Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AH}$, равный ___________ $\overrightarrow{OM}$, и вектор $\overrightarrow{AK}$, равный вектору _____ (выполните построение). Так как $AK \parallel AB$, то точка K ___________ на прямой AB. Через прямую AB и точку H проходит ______________. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AM}$ ___________ в этой плоскости. Следовательно, данные векторы $\overrightarrow{AB}$, _____ и $\overrightarrow{OM}$ ________________________, что и требовалось доказать.



123

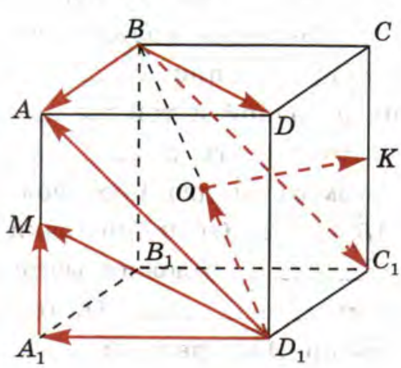
Точка O — середина диагонали BD_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K — середина ребра CC_1, точка M лежит на ребре AA_1. Найдите на рисунке компланарные векторы.

Решение.

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от ________ и той же ________ они будут лежать в одной ______________

Можно сказать иначе: векторы называются ______________________, если имеются ___________ им векторы, лежащие в __________ плоскости.

1) В плоскости грани ADD_1A_1 лежат векторы $\overrightarrow{DD_1}$, _____, _____, _____ и _____. Следовательно, эти пять векторов ______________________. Прямые BC_1 и _____ параллельны, поэтому если от точки D_1 отложить __________, равный век-



тору $\overrightarrow{BC_1}$, то он будет лежать в ________________ грани ADD_1A_1. Следовательно, векторы $\overrightarrow{DD_1}$, _____, _____, _____, _____ и $\overrightarrow{BC_1}$ ____________________________

2) Векторы $\overrightarrow{D_1A_1}$ и $\overrightarrow{D_1C_1}$ лежат в ________________ $A_1D_1C_1$, векторы $\overrightarrow{D_1C_1}$ и $\overrightarrow{BA}$ ______________________________, следовательно, векторы $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{D_1C_1}$ и _____ компланарны. Прямые BD и B_1D_1 ______________________, поэтому если от точки D_1 отложить ___________, равный вектору $\overrightarrow{BD}$, то он будет лежать в _______________ $A_1D_1C_1$. Аналогично поскольку OK ___ A_1C_1, то вектор, равный ___________ $\overrightarrow{OK}$ и отложенный от точки D_1, будет лежать в плоскости _________. Следовательно, компланарными являются векторы $\overrightarrow{D_1A_1}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$, _____ и _____

3) Отрезки BA и D_1C_1 равны и ______________________, следовательно, четырехугольник ABC_1D_1 является ____________________________, а потому векторы $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{D_1A}$, _____, _____ и _____ лежат в одной ____________________ и, следовательно, компланарны.

Ответ. Компланарными являются векторы:

1) $\overrightarrow{DD_1}$, _____, _____, _____, _____ и _____

2) $\overrightarrow{D_1A_1}$, _____, _____, _____ и _____

3) $\overrightarrow{BA}$, _____, _____, _____ и _____

124

Заполните пропуски в формулировке признака компланарности трех векторов:

Если вектор $\vec{c}$ можно _________________ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представить в виде $\vec{c} = x$ ___ + _____, где ___ и y — некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, ___ и $\vec{c}$ _______________________

125

Дано: $\vec{c} = 3(\vec{a} - \vec{b} + \vec{d}) - (3\vec{d} - \vec{a} - \vec{b})$. Докажите, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Доказательство.

Упростим данное равенство: $\vec{c} = 3(\vec{a} - \vec{b} +$ ___$) - (3\vec{d} -$ ___ $- \vec{b}) = 3\vec{a} -$
$-$ ___________ $- 3\vec{d} +$ ________ $= 3\vec{a} + \vec{a} - 3\vec{b} +$ ________________ $= 4\vec{a} -$ _____

Итак, вектор $\vec{c}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и ___, следовательно, векторы $\vec{a}$, ___ и $\vec{c}$ ______________________, что и требовалось доказать.

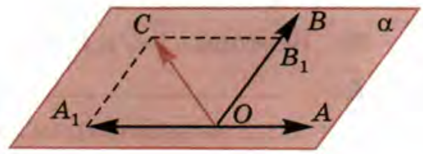
126

Докажите свойство компланарных векторов:

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

причем коэффициенты x и y определяются единственным образом.



Доказательство. Отложим от произвольной точки O векторы: $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ __________________, то векторы $\overrightarrow{OA}$, ____ и $\overrightarrow{OC}$ лежат в одной __________________ (обозначим ее буквой α). Поскольку $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} =$ ____, то векторы $\overrightarrow{OA}$ и _____ неколлинеарны. В каждой плоскости пространства справедливы все аксиомы и __________ планиметрии.

Следовательно, в плоскости α выполняется теорема: любой вектор можно ________________________ по двум данным неколлинеарным _______________, причем коэффициенты разложения определяются единственным ______________

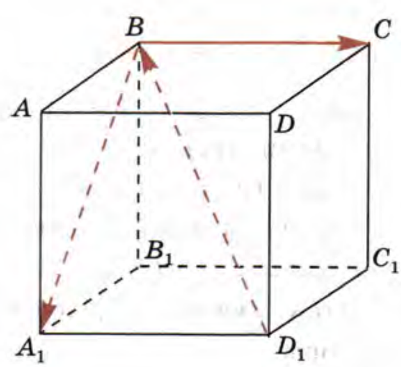
Поэтому $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y$ ____, т. е. $\vec{c} =$ ___ $\vec{a} + y$ ___, причем числа x и ___ определяются ____________________________ образом, что и требовалось доказать.

127

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажите, что вектор $\overrightarrow{D_1B}$ можно единственным образом разложить по векторам $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$. Найдите коэффициенты разложения.

Решение.

1) Прямые BC и A_1D_1 __________ _____________, поэтому точки A_1, B, C и ___ лежат в _________ плоскости, а значит, векторы $\overrightarrow{BA_1}$, ____ и $\overrightarrow{D_1B}$ компланарны. Кроме того, векторы $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$ не ______________________



Следовательно, вектор $\overrightarrow{D_1B}$ __________ разложить по векторам $\overrightarrow{BA_1}$ и _____, причем коэффициенты разложения определяются ______________________ образом.

2) В кубе ребра BC и A_1D_1 равны и ________________ , следовательно, четырехугольник A_1BCD_1 является ________________ .
Поэтому $\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA_1} +$ ____ (правило ________________).
Отсюда получаем: $\overrightarrow{D_1B} = -\overrightarrow{BD_1} = (\_\_)\overrightarrow{BA_1} + (\_\_)\overrightarrow{BC}$, т. е. коэффициенты разложения равны -1 и ____

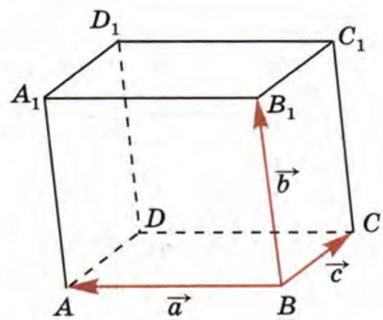
Ответ.

________________ разложения равны ____ и ____

128

Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Докажите, что справедливо равенство:

$$\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$



Доказательство.

Используя законы ________________ векторов, преобразуем левую часть искомого равенства:

$$\overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AC_1} + \_\_\_\_ + \overrightarrow{C_1A_1} + \overrightarrow{BC} =$$
$$= (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}) + (\_\_\_\_ + \overrightarrow{AC_1}) + (\_\_\_\_ + \_\_\_\_) =$$
$$= \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \_\_\_\_ = \overrightarrow{BC_1} + \_\_\_\_ = \overrightarrow{BD_1}.$$

С другой стороны, диагональ BD_1 параллелепипеда изображает ________ векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и ____ , т.е. по правилу ________ ________________ $\overrightarrow{BD_1} = \vec{a} +$ ___ + ___. Отсюда следует справедливость искомого равенства.

129

Заполните пропуски:

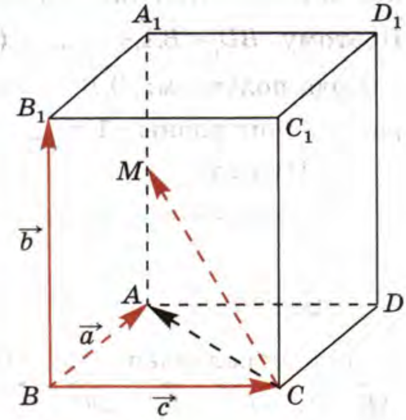
Любой вектор $\vec{p}$ ________ разложить по трем данным ________________ векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т. е. представить в виде $\vec{p} = x\,\vec{a} + y$ ___ + ___ $\vec{c}$, где x, y, ___ — некоторые числа. При этом ________________ разложения определяются ________________ образом.

130

Точка M — середина ребра AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Выразите вектор $\overrightarrow{CM}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BB_1}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$.

б) Найдите длину вектора $\overrightarrow{CM}$, если $AB = 3$, $BC = 4$, $BB_1 = 24$.



Решение.

а) По правилу ________ $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} +$ ____. Так как $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} =$ = ____, то $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} -$ ____ $= \vec{a} -$ ____,

а так как точка M — середина ребра ____, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}$ ____ = ____ $\overrightarrow{BB_1} =$ ____ $\vec{b}$.

Итак, $\overrightarrow{CM} = \vec{a} -$ ____ + ____

б) В прямоугольном ________ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1 \perp ABC$, следовательно, $AA_1 \perp AC$. В прямоугольном треугольнике ACM $CM^2 = AC^2 +$ ____, но $AC^2 = AB^2 +$ ____ $= 3^2 +$ ____ = ____,

$AM = \frac{1}{2}$ ____ = ____

Итак, $CM^2 =$ ____ + ____, т. е. $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{\quad}$ ____ = ____

Ответ.

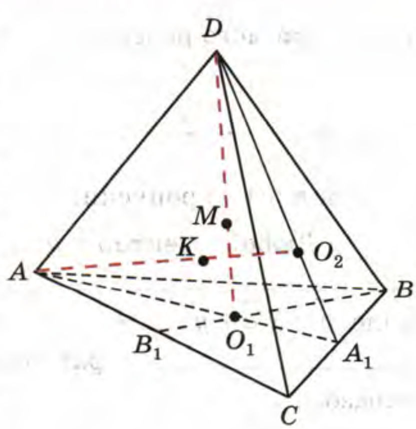
а) $\overrightarrow{CM} =$ ________

б) $|\overrightarrow{CM}| =$ ____

131

Назовем *медианой тетраэдра* отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противолежащей грани.

Докажите, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3 : 1$, считая от вершины тетраэдра.



Доказательство.

Пусть точки A_1 и B_1 — середины отрезков BC и AC, O_1 и O_2 — точки пересечения медиан граней ABC и BCD. Обозначим буквой M точку на медиане DO_1 тетраэдра, такую, что $DM : MO_1 = 3 : 1$, буквой K — точку на медиане AO_2, такую, что $AK : KO_2 = 3 : 1$. Докажем, что точки M и K совпадают.

1) Так как $DM : MO_1 = 3 : 1$, то $\overrightarrow{DM} = \_\_\_ \overrightarrow{MO_1}$, и, следовательно, для произвольной точки X пространства выполняется равенство (см. задание 121)

$$\overrightarrow{XM} = \frac{\overrightarrow{XD} + \_\_\_ \overrightarrow{XO_1}}{1 + \_\_\_},$$

т. е.

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{XD} + \frac{3}{4}\_\_\_\_ . \qquad (1)$$

2) Медианы AA_1 и BB_1 треугольника _____ пересекаются в точке ___ , поэтому $BO_1 : O_1B_1 = \_\_\_ : 1$. Следовательно, $\overrightarrow{BO_1} = 2\_\_\_\_$, и потому для точки X выполняется равенство

$$\overrightarrow{XO_1} = \frac{\overrightarrow{XB} + \_\_\_\_\_}{1 + \_\_\_},$$

т. е.

$$\overrightarrow{XO_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\_\_\_\_ . \qquad (2)$$

3) Точка B_1 — __________ отрезка AC, поэтому $\overrightarrow{XB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_)$ (см. задание 119).

4) Подставив выражение для $\overrightarrow{XB_1}$ в равенство (2), получим:

$$\overrightarrow{XO_1} = \frac{1}{3}\_\_\_\_ + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_ + \overrightarrow{XC}).$$

5) Подставим теперь полученное разложение вектора $\overrightarrow{XO_1}$ по векторам $\overrightarrow{XA}$, ____ и $\overrightarrow{XC}$ в равенство (1):

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{4}\_\_\_\_ + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_ + \_\_\_\_ + \overrightarrow{XD}).$$

6) Аналогично рассуждая для точки K и произвольной точки X, получаем равенство

$$\overrightarrow{XK} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{XA} + \_\_\_\_ + \overrightarrow{XC} + \_\_\_\_).$$

Следовательно, точки M и ___ совпадают, т. е. медианы DO_1 и AO_2 тетраэдра ______________ в точке M и делятся ею в отношении ______ , считая от вершин D и A соответственно.

7) Таким же образом это утверждение доказывается и для остальных двух __________ тетраэдра.

ОГЛАВЛЕНИЕ