8947. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ четыре числа — длины рёбер и диагонали AC_1 — образуют арифметическую прогрессию с положительной разностью d, причём $AA_1 < AB < BC$. Две внешне касающиеся друг друга сферы одинакового неизвестного радиуса R расположены так, что их центры лежат внутри параллелепипеда, причём первая сфера касается граней ABB_1A_1, ADD_1A_1, $ABCD$, а вторая — граней BCC_1B_1, CDD_1C_1, $A_1B_1C_1D_1$. Найдите: а) длины рёбер параллелепипеда; б) угол между прямыми CD_1 и AC_1; в) радиус R.

Ответ. а) $AA_1 = d\sqrt{2}$, $AB = d(\sqrt{2}+1)$, $BC = d(\sqrt{2}+2)$;

б) $\arccos \dfrac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{79+52\sqrt{2}}}$;

в) $R = d\left(\dfrac{3+3\sqrt{2}-\sqrt{5+6\sqrt{2}}}{4}\right)$.

Решение. а) Пусть $AA_1 = t$. Тогда $AB = t+d$, $BC = t+2d$, $AC_1 = t+3d$. По теореме о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда

$$AC_1^2 = AA_1^2 + AB^2 + BC^2,\quad (t+3d)^2 = t^2 + (t+d)^2 + (t+2d)^2,$$

откуда находим, что $AA_1 = t = d\sqrt{2}$. Тогда $AB = t+d = d(\sqrt{2}+1)$, $BC = d(\sqrt{2}+2)$.

б) Введём прямоугольную систему координат, направив ось Ox по лучу AB, ось Oy — по лучу AD, ось Oz — по лучу AA_1. Найдём координаты нужных нам вершин параллелепипеда и векторов:

$$A(0;\,0;\,0),\quad C_1(d(\sqrt{2}+1);\,d(\sqrt{2}+2);\,d\sqrt{2}),\quad C(d(\sqrt{2}+1);\,d(\sqrt{2}+2);\,0),\quad D_1(0;\,d(\sqrt{2}+2);\,d\sqrt{2}).$$

$$\overrightarrow{CD_1} = (-d(\sqrt{2}+1);\,d(\sqrt{2}+2)-d(\sqrt{2}+2);\,d\sqrt{2}) = (-d(\sqrt{2}+1);\,0;\,d\sqrt{2}),$$

$$\overrightarrow{AC_1} = (d(\sqrt{2}+1);\,d(\sqrt{2}+2);\,d\sqrt{2}).$$

Пусть φ — угол между прямыми CD_1 и AC_1. Тогда

$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{CD_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{CD_1}|\cdot|\overrightarrow{AC_1}|}\right| = \left|\frac{-d^2(\sqrt{2}+1)^2 + 0\cdot d(\sqrt{2}+2) + 2d^2}{\sqrt{d^2(\sqrt{2}+1)^2+0^2+2d^2}\cdot\sqrt{d^2(\sqrt{2}+1)^2+d^2(\sqrt{2}+2)^2+2d^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{-(\sqrt{2}+1)^2+2}{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+2}\cdot\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}+2)^2+2}}\right| = \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{11+6\sqrt{2}}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{79+52\sqrt{2}}}.$$

в) Поскольку сферы вписаны в трёхгранные углы с вершинами A и C_1 параллелепипеда, их центры соответственно O и Q имеют координаты $O(R;\,R;\,R)$ и $Q(AB-R;\,BC-R;\,AA_1-R)$. Линия центров касающихся сфер проходит через их точку касания P, поэтому $OQ = OP + QP = 2R$, или

$$\sqrt{(AB-R-R)^2+(BC-R-R)^2+(AA_1-R-R)^2} = 2R.$$

Подставляя в это равенство $BC = d(\sqrt{2}+2)$, $AB = d(\sqrt{2}+1)$, $AA_1 = d\sqrt{2}$, получим уравнение

$$\sqrt{(d\sqrt{2}+d-2R)^2+(d\sqrt{2}+2d-2R)^2+(d\sqrt{2}-2R)^2} = 2R \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 8R^2 - 2(6\sqrt{2}+6)R + (11+6\sqrt{2})d^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; R = \frac{d}{4}\left(3+3\sqrt{2}\pm\sqrt{5+6\sqrt{2}}\right).$$

Центры сфер лежат внутри параллелепипеда, поэтому $R \leqslant d\sqrt{2}$. Следовательно,

$$R = \frac{d}{4}\left(3+3\sqrt{2}-\sqrt{5+6\sqrt{2}}\right).$$