

8947. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ четыре числа — длины рёбер и диагонали AC_1 — образуют арифметическую прогрессию с положительной разностью d , причём $AA_1 < AB < BC$. Две внешне касающиеся друг друга сферы одинакового неизвестного радиуса R расположены так, что их центры лежат внутри параллелепипеда, причём первая сфера касается граней $ABB_1 A_1$, $ADD_1 A_1$, $ABCD$, а вторая — граней $BCC_1 B_1$, $CDD_1 C_1$, $A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите: а) длины рёбер параллелепипеда; б) угол между прямыми CD_1 и AC_1 ; в) радиус R .

Ответ. а) $AA_1 = d\sqrt{2}$, $AB = d(\sqrt{2} + 1)$, $BC = d(\sqrt{2} + 2)$;

б) $\arccos \frac{1 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{79 + 52\sqrt{2}}}$;

в) $R = d \left(\frac{3 + 3\sqrt{2} - \sqrt{5 + 6\sqrt{2}}}{4} \right)$.

Решение. а) Пусть $AA_1 = t$. Тогда $AB = t + d$, $BC = t + 2d$, $AC_1 = t + 3d$. По теореме о квадрате диагонали прямоугольного параллелепипеда

$$AC_1^2 = AA_1^2 + AB^2 + BC^2, \quad (t + 3d)^2 = t^2 + (t + d)^2 + (t + 2d)^2,$$

откуда находим, что $AA_1 = t = d\sqrt{2}$. Тогда $AB = t + d = d(\sqrt{2} + 1)$, $BC = d(\sqrt{2} + 2)$.

б) Введём прямоугольную систему координат, направив ось Ox по лучу AB , ось Oy — по лучу AD , ось Oz — по лучу AA_1 . Найдём координаты нужных нам вершин параллелепипеда и векторов:

$$A(0; 0; 0), \quad C_1(d(\sqrt{2} + 1); d(\sqrt{2} + 2); d\sqrt{2}), \quad C(d(\sqrt{2} + 1); d(\sqrt{2} + 2); 0), \quad D_1(0; d(\sqrt{2} + 2); d\sqrt{2}).$$

$$\overrightarrow{CD_1} = (-d(\sqrt{2} + 1); d(\sqrt{2} + 2) - d(\sqrt{2} + 2); d\sqrt{2}) = (-d(\sqrt{2} + 1); 0; d\sqrt{2}),$$

$$\overrightarrow{AC_1} = (d(\sqrt{2} + 1); d(\sqrt{2} + 2); d\sqrt{2}).$$

Пусть φ — угол между прямыми CD_1 и AC_1 . Тогда

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \left| \frac{\overrightarrow{CD_1} \cdot \overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{CD_1}| \cdot |\overrightarrow{AC_1}|} \right| = \left| \frac{-d^2(\sqrt{2} + 1)^2 + 0 \cdot d(\sqrt{2} + 2) + 2d^2}{\sqrt{d^2(\sqrt{2} + 1)^2 + 0^2 + 2d^2} \cdot \sqrt{d^2(\sqrt{2} + 1)^2 + d^2(\sqrt{2} + 2)^2 + 2d^2}} \right| = \\ &= \left| \frac{-(\sqrt{2} + 1)^2 + 2}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 + 2} \cdot \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2 + (\sqrt{2} + 2)^2 + 2}} \right| = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{79 + 52\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

в) Поскольку сферы вписаны в трёхгранные углы с вершинами A и C_1 параллелепипеда, их центры соответственно O и Q имеют координаты $O(R; R; R)$ и $Q(AB - R; BC - R; AA_1 - R)$. Линия центров касающихся сфер проходит через их точку касания P , поэтому $OQ = OP + QP = 2R$, или

$$\sqrt{(AB - R - R)^2 + (BC - R - R)^2 + (AA_1 - R - R)^2} = 2R.$$

Подставляя в это равенство $BC = d(\sqrt{2} + 2)$, $AB = d(\sqrt{2} + 1)$, $AA_1 = d\sqrt{2}$, получим уравнение

$$\begin{aligned} \sqrt{(d\sqrt{2} + d - 2R)^2 + (d\sqrt{2} + 2d - 2R)^2 + (d\sqrt{2} - 2R)^2} &= 2R \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8R^2 - 2(6\sqrt{2} + 6)R + (11 + 6\sqrt{2})d^2 &= 0 \Leftrightarrow R = \frac{d}{4} \left(3 + 3\sqrt{2} \pm \sqrt{5 + 6\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Центры сфер лежат внутри параллелепипеда, поэтому $R \leq d\sqrt{2}$. Следовательно,

$$R = \frac{d}{4} \left(3 + 3\sqrt{2} - \sqrt{5 + 6\sqrt{2}} \right).$$