

7982. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Пусть M — середина ребра $D_1 C_1$. Найдите периметр треугольника $A_1 D M$, а также расстояние от вершины D_1 до плоскости, проходящей через вершины этого треугольника.

Ответ. $a(\sqrt{5} + \sqrt{2})$; $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Решение. Из прямоугольных треугольников $A_1 D_1 M$, $DD_1 M$ и $DD_1 A_1$ по теореме Пифагора находим, что

$$A_1 M = \sqrt{A_1 D_1^2 + D_1 M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

$$DM = \sqrt{D_1 D^2 + D_1 M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2},$$

$$A_1 D = \sqrt{A_1 D_1^2 + D_1 D^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Следовательно, периметр треугольника $A_1 D M$ равен

$$A_1 M + DM + A_1 D = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} + a\sqrt{2} = a\sqrt{5} + a\sqrt{2} = a(\sqrt{5} + \sqrt{2}).$$

Теперь найдём расстояние от вершины D_1 до плоскости, проходящей через вершины этого треугольника.

Первый способ. Пусть K — середина основания $A_1 D$ равнобедренного треугольника $A_1 M D$. Тогда MK — высота треугольника $A_1 M D$. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника MKD находим, что

$$MK = \sqrt{MD^2 - KD^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть V — объём пирамиды $A_1 D_1 M D$. Тогда

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1 D_1 M} \cdot DD_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} A_1 D_1 \cdot D_1 M \cdot DD_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^3}{12}.$$

С другой стороны,

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1 M D} \cdot h,$$

где h — искомое расстояние от вершины D_1 до плоскости, проходящей через вершины треугольника $A_1 M D$. Следовательно,

$$h = \frac{3V}{S_{\triangle A_1 M D}} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{1}{2} A_1 D \cdot MK} = \frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Второй способ. Примем за начало координат вершину D_1 , а оси координат направим по лучам $D_1 A_1$, $D_1 C_1$ и $D_1 D$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через точки A_1 , D и M , имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$$

(уравнение плоскости в отрезках), или $x + 2y + z - a = 0$. Следовательно,

$$h = \frac{|0 + 0 + 0 - a|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$