

7559. На рёбрах A_1B_1 , AB , A_1D_1 и DD_1 единичного куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взяты точки K , L , M и N соответственно, причём $A_1K = \frac{2}{3}$, $AL = \frac{1}{5}$, $A_1M = \frac{1}{3}$. Определите, какое из рёбер A_1D_1 или D_1C_1 пересекает плоскость, параллельную отрезку ML и содержащую отрезок KN . В каком отношении это ребро делится плоскостью?

Ответ. D_1C_1 ; в любом отношении от 0 до $\frac{1}{59}$, считая от вершины D_1 .

Решение. Выберем систему координат с началом в точке A_1 . Ось x направим по лучу A_1D_1 , ось y — по лучу A_1B_1 , ось z — по лучу A_1A . Тогда координаты точек K , L , M и N таковы:

$$K\left(0; \frac{2}{3}; 0\right), \quad L\left(0; \frac{1}{5}; 1\right), \quad M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right), \quad N(1; 0; t),$$

где $0 \leq t \leq 1$. Отложим от точки L вектор

$$\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{MK} = \left(0 - \frac{1}{3}; \frac{2}{3} - 0; 0 - 0\right) = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right).$$

Тогда точка P имеет координаты $\left(-\frac{1}{3}; \frac{13}{15}; 1\right)$. Искомая плоскость проходит через точки K , P и N . Ищем уравнение этой плоскости в виде $ax + by + cz = 1$. Подставляя в это уравнение координаты точек K , P и N , находим, что

$$c = \frac{1}{10(t+3)}, \quad a = \frac{9t+30}{10(t+3)}, \quad b = \frac{3}{2}.$$

После очевидных упрощений получим уравнение $(9t+30)x + 15(t+3)y + z = 10(t+3)$.

Подставив нули вместо y и z найдём точку пересечения плоскости с прямой A_1D_1 — $x = \frac{10(t+3)}{3(3t+10)}$, а так как $0 \leq t \leq 1$, то $1 \leq x \leq \frac{40}{39}$. Значит, секущая плоскость не пересекает ребро A_1D_1 .

Подставив в полученное уравнение $x = 1$ и $z = 0$ найдём точку пересечения плоскости с прямой D_1C_1 — $y = \frac{t}{15(t+3)}$, а так как $0 \leq t \leq 1$, то $0 \leq y \leq \frac{1}{60}$. Значит, секущая плоскость пересекает ребро D_1C_1 и при этом точка пересечения делит это ребро в любом отношении от 0 до $\frac{1}{59}$, считая от вершины D_1 .