

7558. Площади проекций некоторого треугольника на координатные плоскости Oxy и Oyz равны соответственно $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$, а площадь проекции на плоскость Oxz — целое число. Найдите площадь самого треугольника, если известно, что она также является целым числом.

Ответ. 7.

Указание. Если вектор образует с осями координат углы α , β и γ , то

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Решение. Пусть вектор, перпендикулярный плоскости исходного треугольника, образует с осями координат Ox , Oy и Oz углы α , β и γ соответственно. Тогда

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Обозначим площадь исходного треугольника через S , а площади проекций на координатные плоскости Oyz , Oxz и Oxy через S_x , S_y и S_z соответственно ($S_z = \sqrt{6}$, $S_x = \sqrt{7}$). По теореме о площади проекции плоской фигуры на плоскость

$$\sqrt{7} = S_x = S |\cos \alpha|, \quad S_y = S |\cos \beta|, \quad \sqrt{6} = S_z = S |\cos \gamma|.$$

Тогда

$$7 + 6 + S_y^2 = S^2 \cos^2 \alpha + S^2 \cos^2 \beta + S^2 \cos^2 \gamma = S^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = S^2.$$

Поэтому

$$S^2 - S_y^2 = 13, \quad (S - S_y)(S + S_y) = 13.$$

Поскольку оба сомножителя в левой части равенства — положительные целые числа, причём второй сомножитель больше первого, равенство возможно только в случае, когда

$$\begin{cases} S - S_y = 1 \\ S + S_y = 13. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $S_y = 7$.