7553. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=3$, $BC=2$, $CC_1=4$. На ребре AB взята точка M, причём $AM:MB=1:2$; K — точка пересечения диагоналей грани CC_1D_1D. Найдите угол и расстояние между прямыми D_1M и B_1K.

Ответ. $\arccos\frac{5}{\sqrt{861}}$, $\frac{20}{\sqrt{209}}$.

Указание. Выберите прямоугольную систему координат. Через прямую D_1M проведите плоскость, параллельную прямой B_1K. Затем найдите расстояние от произвольной точки прямой B_1K до проведённой плоскости.

Решение. Выберем систему координат с началом в точке D_1. Ось x направим по лучу D_1C_1, ось y — по лучу D_1A_1, ось z — по лучу D_1D. Тогда координаты концов отрезков D_1M и B_1K таковы:

$$D_1(0;0;0),\quad M(1;2;4),\quad B_1(3;2;0),\quad K\left(\frac{3}{2};0;2\right).$$

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{D_1M}$ и $\overrightarrow{B_1K}$:

$$\overrightarrow{D_1M}=(1;2;4),\quad \overrightarrow{B_1K}=\left(-\frac{3}{2};-2;2\right).$$

Пусть φ — угол между векторами $\overrightarrow{D_1M}$ и $\overrightarrow{B_1K}$. Тогда

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{D_1M}\cdot\overrightarrow{B_1K}}{|\overrightarrow{D_1M}|\cdot|\overrightarrow{B_1K}|}=\frac{-\frac{3}{2}-4+8}{\sqrt{(1+4+16)\left(\frac{9}{4}+4+4\right)}}=\frac{5}{\sqrt{21\cdot41}}=\frac{5}{\sqrt{861}}.$$

Если α — угол между прямыми D_1M и B_1K, то

$$\cos\alpha=|\cos\varphi|=\frac{5}{\sqrt{861}}.$$

Пусть $\vec{n}=(a;b;c)$ — вектор, перпендикулярный прямым D_1M и B_1K. Тогда $\vec{n}\cdot\overrightarrow{D_1M}=0$ и $\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1K}=0$, или

$$\begin{cases} a+2b+4c=0\\ \frac{3}{2}a-2b+2c=0.\end{cases}$$

Сложив почленно эти уравнения, получим, что $-\frac{1}{2}a+6c=0$, или $a=12c$. Положим $c=1$. Тогда $a=12$, $b=\frac{1}{2}(-a-4c)=-8$.

Через точку D_1 проведём плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{n}=(12;-8;1)$:

$$12x-8y+z=0.$$

Эта плоскость проходит через прямую D_1M параллельно прямой B_1K, значит, расстояние между прямыми D_1M и B_1K равно расстоянию от произвольной точки прямой B_1K (например, от точки $B_1(3;2;0)$) до этой плоскости. Если ρ — искомое расстояние, то

$$\rho=\frac{|12\cdot3-8\cdot2+0|}{\sqrt{12^2+8^2+1^2}}=\frac{20}{\sqrt{209}}.$$