

7552. Непересекающиеся диагонали двух смежных граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β . Найдите угол между этими диагоналями.

Ответ. $\arccos(\sin \alpha \sin \beta)$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пусть AD_1 и DC_1 — указанные диагонали. Тогда $\angle AD_1 A_1 = \alpha$, $\angle DCD_1 = \beta$.

Выберем систему координат с началом в точке A . Ось x направим по лучу AB , ось y — по лучу AD , ось z — по лучу AA_1 . Пусть $AB = 1$. Тогда

$$AA_1 = DD_1 = D_1 C_1 \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \beta, \quad AD = A_1 D_1 = AA_1 \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha.$$

Тогда координаты концов отрезков AD_1 и DC_1 таковы:

$$A(0; 0; 0), \quad D_1(0; \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha; \operatorname{tg} \beta),$$

$$D(0; \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha; 0), \quad C_1(1; \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha; \operatorname{tg} \beta).$$

Пусть φ — угол между векторами $\overrightarrow{AD_1} = (0; \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha; \operatorname{tg} \beta)$ и $\overrightarrow{DC_1} = (1; 0; \operatorname{tg} \beta)$. Тогда

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DC_1}}{|\overrightarrow{AD_1}| \cdot |\overrightarrow{DC_1}|} = \frac{0 \cdot 1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha \cdot 0 + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta} \cdot \sqrt{1^2 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \\ &= \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg} \beta \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} \cdot \frac{1}{\cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \beta \cos \beta}{\frac{1}{\sin \alpha}} = \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Если γ — угол между указанными прямыми, то

$$\cos \gamma = |\cos \varphi| = \sin \alpha \sin \beta.$$