

7316. В тетраэдре $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру CD , P — произвольная точка пространства. Докажите, что сумма квадратов расстояний от точки O до середин рёбер AC и BD равна сумме квадратов расстояний от точки P до середин рёбер AD и BC .

Решение. Докажем сначала, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки пространства до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других его вершин.

Действительно, пусть $KLMN$ — прямоугольник со сторонами $KL = a$ и $KN = b$ (рис. 1). Выберем прямоугольную систему координат, направив ось OX по лучу KL , ось OY — по лучу KN , а ось OZ по лучу с началом в точке K и перпендикулярному плоскости прямоугольника. Пусть $P(x; y; z)$ — произвольная точка пространства. Найдём квадраты расстояний от этой точки до вершин $K(0; 0; 0)$, $L(a; 0; 0)$, $M(a; b; 0)$ и $N(0; b; 0)$:

$$PK^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$PL^2 = (x - a)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = (x - a)^2 + y^2 + z^2,$$

$$PM^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - 0)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2,$$

$$PN^2 = (x - 0)^2 + (y - b)^2 + (z - 0)^2 = x^2 + (y - b)^2 + z^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} PK^2 + PM^2 &= (x^2 + y^2 + z^2) + ((x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2) = \\ &= ((x - a)^2 + y^2 + z^2) + (x^2 + (y - b)^2 + z^2) = PL^2 + PN^2. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Перейдём к нашей задаче (рис. 2). Пусть K , L , M и N — середины рёбер AC , AD , BD и BC соответственно. Тогда ML и KN — средние линии треугольников ABD и ABC , поэтому $ML = \frac{1}{2}AB = KN$ и $ML \parallel AB \parallel KN$, значит, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм, а так как $KL \parallel CD$, $KN \parallel AB$ и $AB \perp CD$, то это прямоугольник. Тогда по доказанному утверждению $PM^2 + PK^2 = PL^2 + PN^2$. Что и требовалось доказать.