4237. Докажите, что координаты точки пересечения медиан треугольника есть средние арифметические соответствующих координат вершин треугольника.

Решение. Пусть $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$ — вершины треугольника, $M(x_0; y_0)$ — точка пересечения его медиан.

Первый способ. Известно, что для любой точки O верно равенство

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Пусть $O(0; 0)$ — начало координат. Тогда координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OM}$ есть координаты точек A, B, C и M соответственно. Следовательно, указанное выше векторное равенство равносильно двум числовым равенствам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Второй способ. Известно, что медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении $2:1$, считая от вершины. Поэтому, если $D(x_4; y_4)$ — середина отрезка BC, то $AM : MD = 2:1$.

Поскольку точка $M(x_0; y_0)$ делит отрезок с концами в точках $A(x_1; y_1)$ и $D(x_4; y_4)$ в отношении $2:1$, считая от точки A, то по теореме о пропорциональных отрезках проекция точки M на ось OX делит проекцию отрезка AD на эту ось в том же отношении, т. е.

$$\frac{x_0 - x_1}{x_4 - x_0} = 2.$$

Отсюда находим, что

$$x_0 = \frac{x_1 + 2x_4}{3}.$$

Аналогично находим, что

$$y_0 = \frac{y_1 + 2y_4}{3}.$$

Поскольку $D(x_4; y_4)$ — середина отрезка BC, то

$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y_0 = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Окончательно получим, что

$$x_0 = \frac{x_1 + 2x_4}{3} = \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + 2y_4}{3} = \frac{y_1 + 2 \cdot \frac{y_2 + y_3}{2}}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$