3. Дан куб $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Докажите, что прямая PM_1 перпендикулярна к плоскостям MN_1Q_1 и QNP_1.

Доказательство :

Введем прямоугольную систему координат. Примем - сторона куба равна а. Следовательно:

1) M_1 (a; 0; a), P (0; a; 0), PM_1 {a; -a; a}; M (a; 0; 0), Q_1 (0; 0; a), MQ_1 (-a; 0; a).

PM_1 и MQ_1 – направляющие векторы прямых PM_1 и MQ_1, угол между ними равен углу между этими прямыми.

$$\cos (PM_1\ MQ_1) = \frac{|-a^2+a^2|}{\sqrt{3a^2}\cdot\sqrt{2a^2}} = 0,$$

значит, угол между ними прямыми PM_1 и MQ_1 равен 90^o.

Докажем, что прямая MN_1, пересекающая прямую MQ_1 в точке M и лежащая в плоскости MN_1Q_1 (как прямая MN_1), тоже перпендикулярна прямой PM_1.

N_1(a; a; a); MN_1 и PM_1 – направляющие векторы этих прямых.

MN_1 {0; a; a}.

$$\cos (PM_1\ MN_1) = \frac{|-a^2+a^2|}{\sqrt{3a^2}\cdot\sqrt{2a^2}} = 0,\ PM_1\ MN_1 = 90^o.$$

Мы доказали, что $PM_1 \perp MQ_1$; $PM_1 \perp MN_1$ лежит в плоскости MN_1Q_1; MN_1 лежит в плоскости MN_1Q_1. Эти прямые пересекаются в точке M. Значит, PM_1 плоскости $\perp MN_1Q_1$.

2) Прямые QN и QP_1 лежат в плоскости QNP_1 и пересекаются в точке Q.

Q (0; 0; 0), N (a; a; 0), QN {a; a; 0}, P_1 (0; a; a), QP_1 {0; a; a}

$$\cos (PM_1\ QN) = \frac{|a^2-a^2|}{\sqrt{3a^2}\cdot\sqrt{2a^2}} = 0,\ PM_1 \perp QN_1;$$

$$\cos (PM_1\ QP_1) = \frac{|-a^2+a^2|}{\sqrt{3a^2}\cdot\sqrt{2a^2}} = 0,\ PM_1 \perp QP_1.$$

Таким образом, прямая PA_1 перпендикулярна плоскости QNP_1.