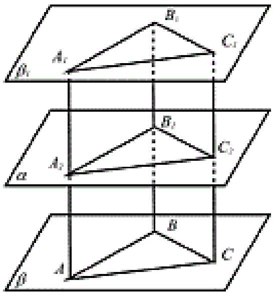
2. При зеркальной симметрии относительно плоскости α плоскость β отображается на плоскость β_1. Докажите, что если: а) $\beta || \alpha$, то $\beta_1 || \alpha$; б) $\beta \perp \alpha$, то β_1 совпадает с β.

Доказательство

а) В плоскости β выберем три точки A, B, C не лежащие на одной прямой.



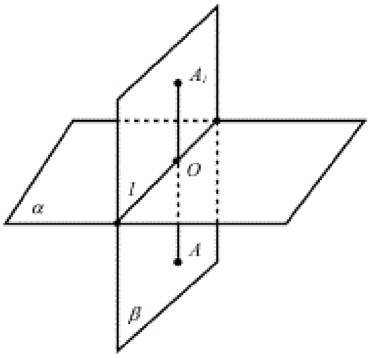
Проведем $AA_2 \perp \alpha$, $BB_2 \perp \alpha$, $CC_2 \perp \alpha$.

Продолжим эти отрезки за точки A_1, B_1, C_1 так, что $A_2A_1 = AA_2$, $B_2B_1 = BB_2$, $C_2C_1 = CC_2$. AA_1B_1B – прямоугольник, потому что $AA_1 = BB_1$ и $AA_1 || BB_1$ (две прямые, перпендикулярные к одной плоскости, параллельны). Значит, $A_1B_1 || AB$. BB_1C_1C – прямоугольник, потому что $BB_1 = CC_1$ и $BB_1 || BC$. Тогда, $B_1C_1 || BC$.

Плоскость β_1 проходит через точки A_1, B_1 и C_1 (аксиома №1), она – единственная.

Если две пересекающиеся прямые (BA и BC) одной плоскости (β) параллельны двум прямы (B_1A_1 и B_1C_1) другой плоскости (β_1), то эти плоскости параллельны: $\beta_1 || \beta$.

б) Примем $\alpha \perp \beta$. Возьмем произвольную точку $A \in \alpha$ и проведем $AO \perp$ плоскости α. Продолжим отрезок за точку O на расстояние $OA_1 = AO$.



Если две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из них проведен перпендикуляр, имеющий общую точку с другой плоскостью, то этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости, то есть $AO \subset \beta$, значит, и $AA_1 \subset \beta$.

Вывод: Каждая точка плоскости β отображается в точку, ей симметричную, которая тоже принадлежит плоскости β. Тогда, плоскость β отображается сама на себя, или β_1 совпадает с β.