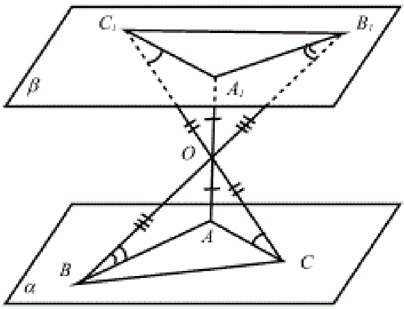
1. Докажите, что при центральной симметрии: а) плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость; б) плоскость, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

Доказательство

а) Пусть O – центр симметрии, α – данная плоскость.

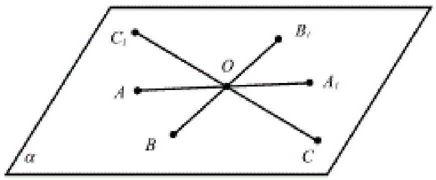


1. Выберем точку $C \in a$, проведем отрезок CO и продолжим его за точку O на расстояние $OC_1 = OC$.
2. Выберем точку $A \in a$, проведем отрезок AO и продолжим его за точку O на расстояние $OC_1 = OA$.
3. Выберем точку $B \in a$, проведем отрезок BO и продолжим его за точку O на расстояние $OB_1 = OB$.
4. Через точки A_1, B_1, C_1 проведем плоскость β (Аксиома №1), такая плоскость – единственная.
5. Соединим точки A, B и C отрезками; соединим точки A_1, B_1 и C_1 отрезками. $\Delta OAC = \Delta O_1A_1C_1$, потому что $OA_1 = OA$, $OC_1 = OC$ и $\angle AOC = \Delta A_1OC_1$ как вертикальные. Отсюда $AC = A_1C_1$.

Таким образом, $\angle A_1C_1O = \angle ACO$, по признаку параллельности прямых $A_1C || AC$.

6. Для ΔOAB и ΔOA_1B_1 повторим рассуждение и получим, что $\Delta AOB = \Delta OA_1B_1$. Таким образом, $\angle A_1B_1O = \angle ABO$, по признаку параллельности прямых $A_1B_1 || AB$.
7. Если две пересекающиеся прямые (AC и AB) одной плоскости (α) соответственно параллельны двум прямым (A_1C_1 и A_1B_1) другой плоскости (β), то эти плоскости параллельны. Итак, $\alpha || \beta$, утверждение доказано.

б) Если точка $O \in \alpha$, то любая точка плоскости β имеет ей симметричную точку относительно O, тоже принадлежащую плоскости α.



Итак, для $A \in \alpha$ ей симметричная точка $A_1 \in \alpha$; для $B \in \alpha$ ей симметричная точка $B_1 \in \alpha$; для $C \in \alpha$ ей симметричная точка $C_1 \in \alpha$.

Через три точки A_1, B_1, C_1, принадлежащие плоскости β, можно провести единственную плоскость, следовательно, она совпадает с плоскостью α.