Угол между векторами. Скалярное произведение векторов

Теория:

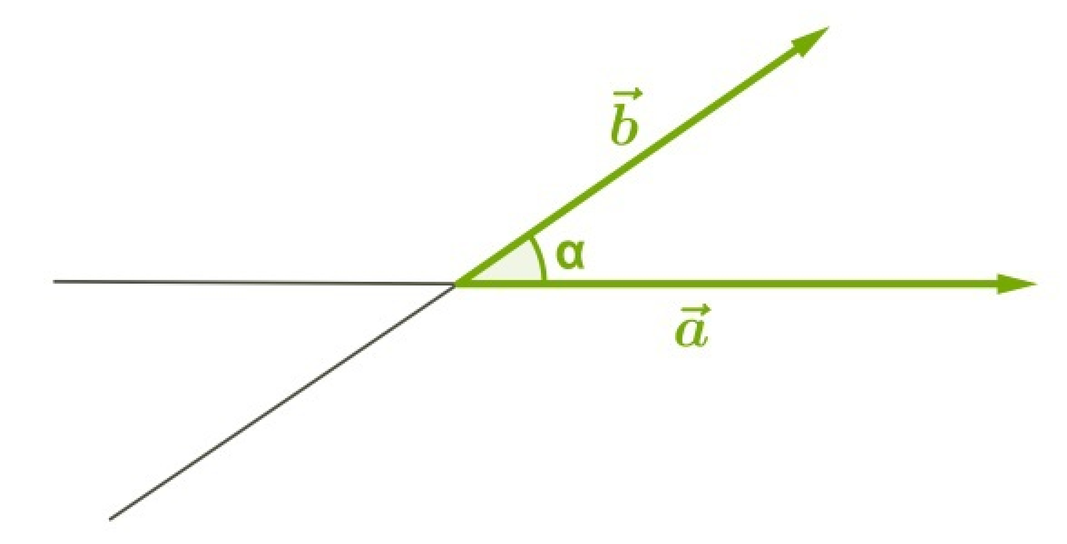
Угол между векторами

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ всегда образуют угол.

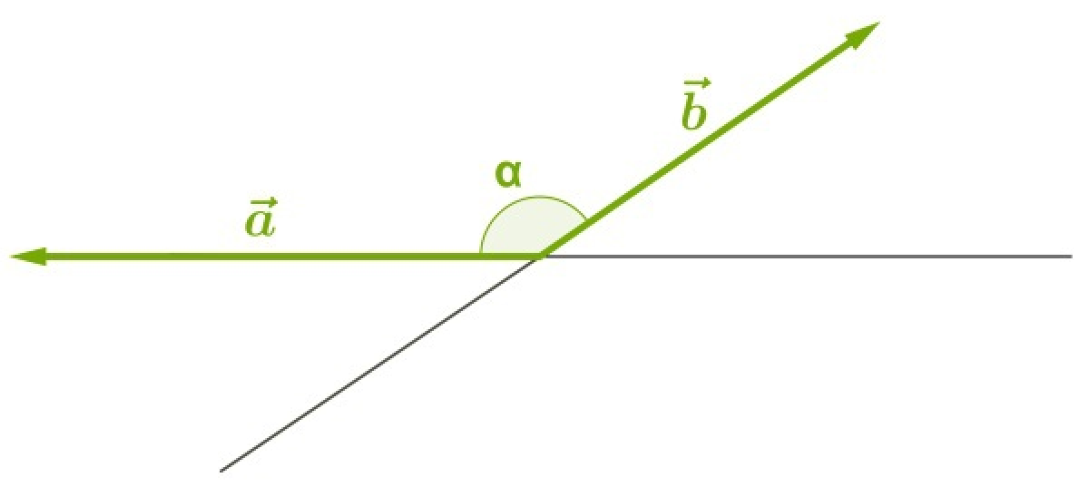
Угол между векторами может принимать значения от 0° до 180° включительно.
Если векторы не параллельны, то их можно расположить на пересекающихся прямых.

Векторы могут образовать:

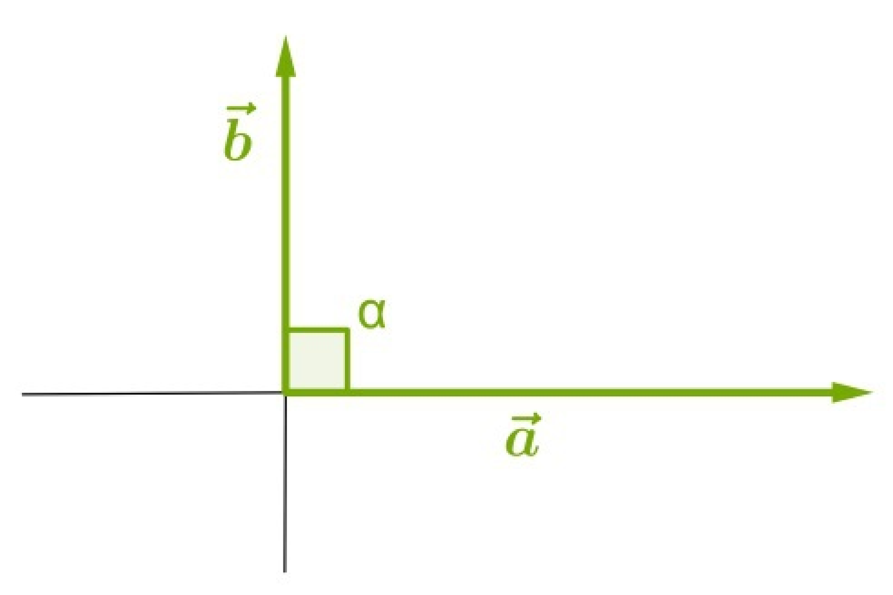
1. Острый угол



2. Тупой угол

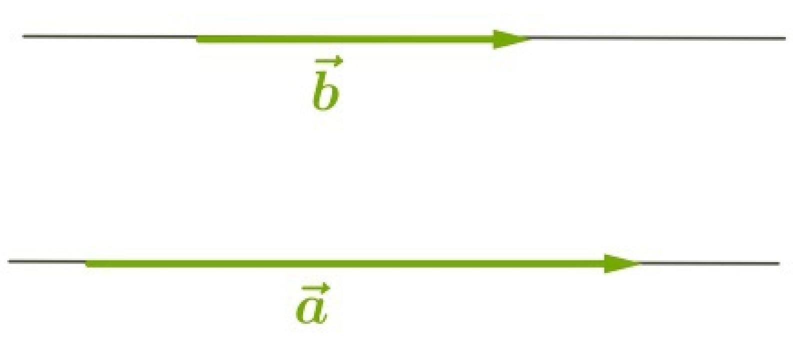


3. Прямой угол (векторы перпендикулярны)

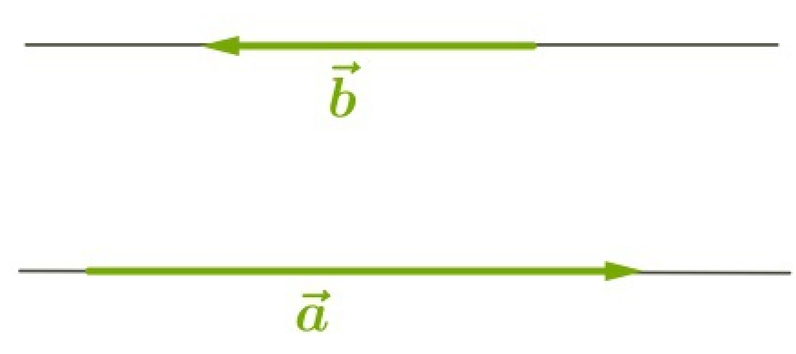


Если векторы расположены на параллельных прямых, то они могут образовать:

4. Угол величиной 0° (векторы сонаправлены)



5. Угол величиной 180° (векторы противоположно направлены)



Если один из векторов или оба вектора нулевые, то угол между ними будет равен 0°.

Угол между векторами записывают так:
$\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \alpha$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$

Результат скалярного произведения векторов является **числом** (в отличие от результата рассмотенных ранее действий с векторами — сложения, вычитания и умножения на число. В таких случаях результатом был вектор). При умножении вектора на вектор получается число, так как длины векторов — это числа, косинус угла — число, соответственно, их произведение также будет являться числом.

1. Если угол между векторами острый, то скалярное произведение будет положительным числом (так как косинус острого угла — положительное число).
Если векторы сонаправлены, то угол между ними будет равен 0°, а косинус равен 1, скалярное произведение также будет положительным.

2. Если угол между векторами тупой, то скалярное произведение будет отрицательным (так как косинус тупого угла — отрицательное число).
Если векторы направлены противоположно, то угол между ними будет равен 180°. Скалярное произведение также отрицательно, так как косинус этого угла равен -1.

Справедливы и обратные утверждения:
1. Если скалярное произведение векторов — положительное число, то угол между данными векторами острый.

2. Если скалярное произведение векторов — отрицательное число, то угол между данными векторами тупой.

Особенный третий случай:

Обрати внимание!

3. Если угол между векторами прямой, то скалярное произведение векторов равно нулю, так как косинус прямого угла равен 0.
Обратное суждение: если скалярное произведение векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны.

Вектор, умноженный на самого себя будет числом, которое называется скалярным квадратом вектора. Скалярный квадрат вектора равен квадрату длины данного вектора и обозначается как $\vec{a}^2$.

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов и любого числа справедливы следующие свойства:

1. $\vec{a}^2 \geq 0$, к тому же $\vec{a}^2 > 0$ если $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2. Переместительный или коммутативный закон скалярного произведения: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

3. Распределительный или дистрибутивный закон скалярного произведения:
$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

4. Сочетательный или ассоциативный закон скалярного произведения: $k \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(k \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{b}$.

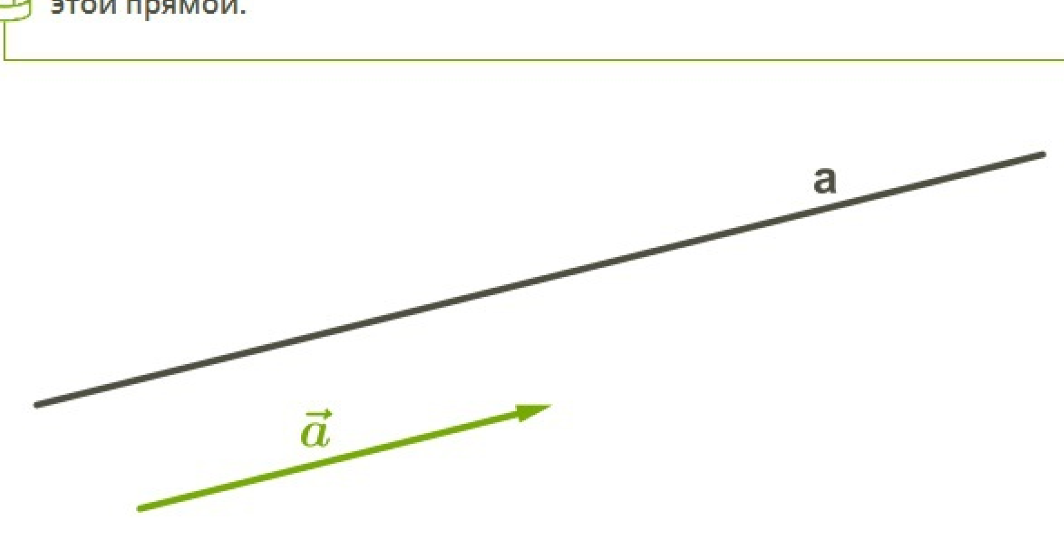
Использование скалярного произведения

Удобно использовать скалярное произведение векторов для определения углов между прямыми и между прямой и плоскостью.

Угол между прямыми

Ознакомимся с ещё одним определением.

Вектор называют направляющим вектором прямой, если он находится на прямой или параллелен этой прямой.



Чтобы определить косинус угла между прямыми, надо определить косинус угла между направляющими векторами этих прямых, то есть найти векторы, параллельные прямым, и определить косинус угла между векторами.
Для этого необходимо рассмотреть определение скалярного произведения, если векторы даны в координатной системе.

Если $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, **то** $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Прежде была рассмотрена формула определения длины вектора в координатной форме.
Теперь, объединив эти формулы, получим формулу для определения косинуса угла между векторами в координатной форме. Так как из формулы скалярного произведения следует, что $cos\,\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, то

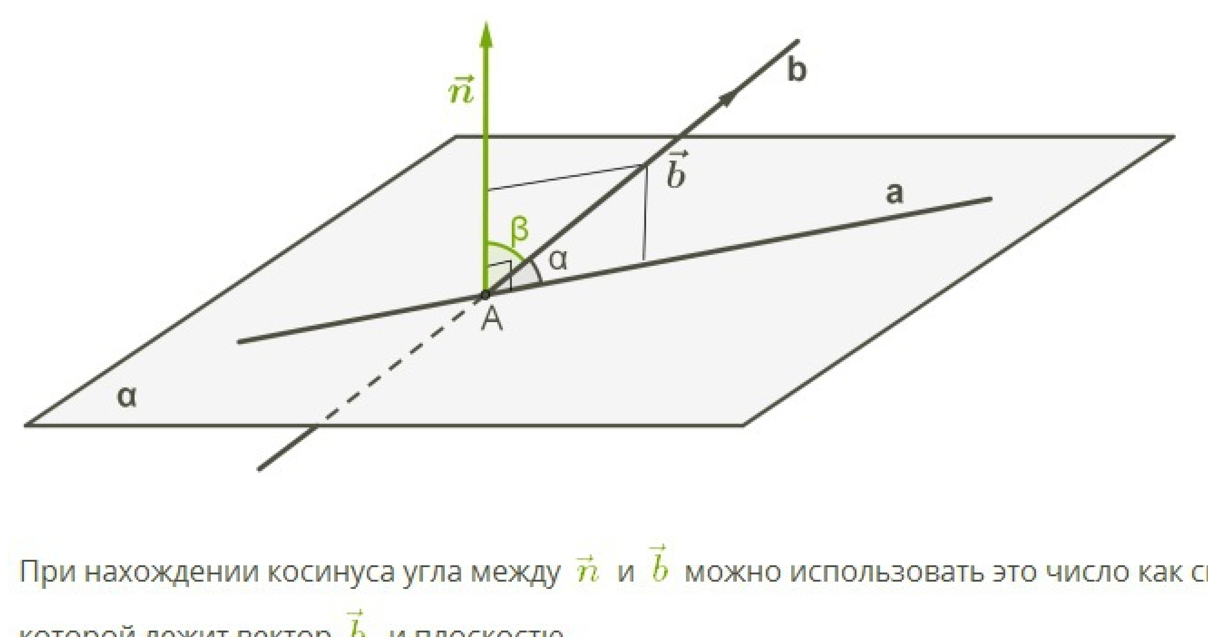
$$cos\,\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Угол между прямой и плоскостью

Введём понятие о нормальном векторе плоскости.

Нормальный вектор плоскости — это любой ненулевой вектор, лежащий на прямой, перпендикулярной к данной плоскости.

Используя следующий рисунок, легко доказать, что косинус угла β между нормальным вектором $\vec{n}$ данной плоскости и неким вектором $\vec{b}$ равен синусу угла α между прямой и плоскостью, так как α и β вместе образуют угол в 90°.



При нахождении косинуса угла между $\vec{n}$ и $\vec{b}$ можно использовать это число как синус угла между прямой, на которой лежит вектор $\vec{b}$, и плоскостю.