Компланарные векторы

Теория:

Одно из определений компланарных векторов гласит:

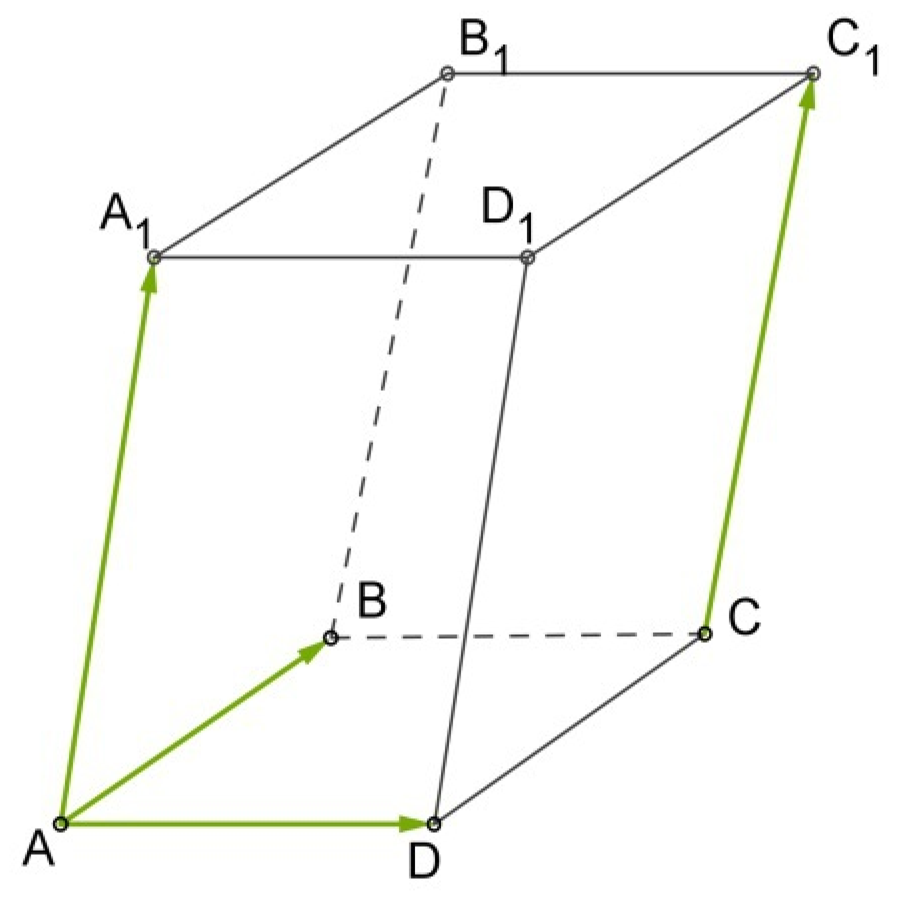
Векторы, которые параллельны одной плоскости или лежат на одной плоскости, называются компланарными векторами.

Тот же смысл имеет и другое определение:

Три вектора называются компланарными, если они, будучи приведёнными к общему началу, лежат в одной плоскости.

Обрати внимание!

Всегда возможно найти плоскость, параллельную двум произвольным векторам, поэтому любые два вектора всегда компланарные.
Если из трёх векторов два коллинеарны, то очевидно, что эти три вектора компланарны.



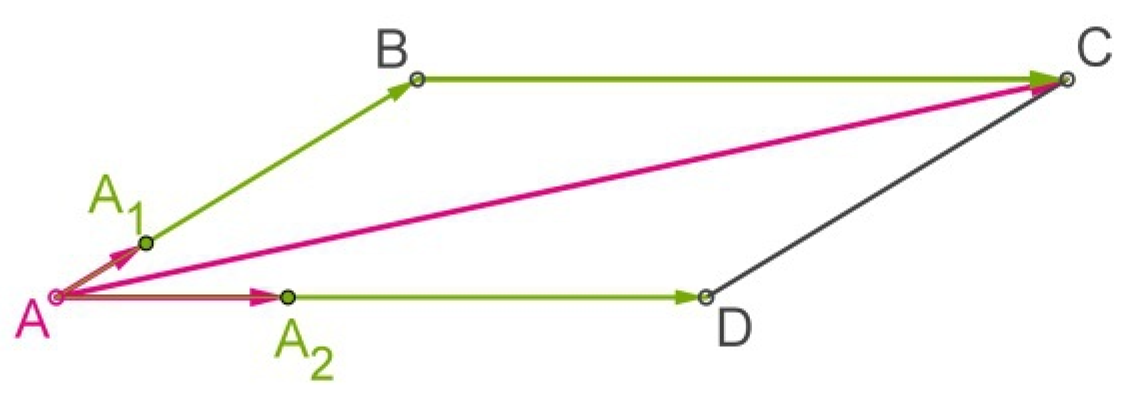
Все выше упомянутые случаи легко рассмотреть, если разместить векторы на рёбрах параллелепипеда.

1. Любые два вектора находятся в одной плоскости, но в одной плоскости можно разместить и векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{AD}$, то есть эти векторы компланарны. Также компланарны векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CC_1}$, так как два из этих векторов параллельны. Легко представить, что если привести их к общему началу, то вектор $\overrightarrow{CC_1}$ совпадет с вектором $\overrightarrow{AA_1}$.

2. Например, векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не компланарны, так как их нельзя разместить в одной и той же плоскости.

Признак компланарности трёх векторов:
Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Если для вектора $\vec{c}$ существует единственная пара реальных чисел x и y, такая, что $\vec{c} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Справедливо и обратное утверждение:
Если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одним единственным образом.

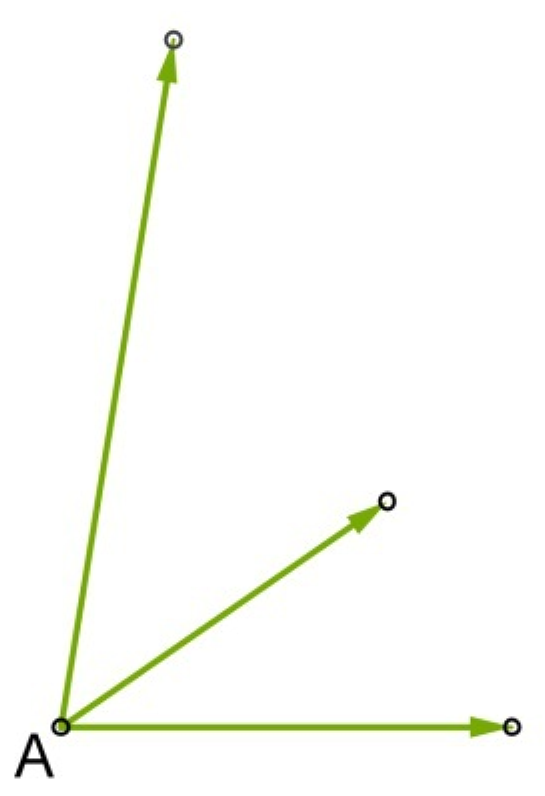


Если разложить вектор $\overrightarrow{AC}$ по векторам $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AA_2}$, то это можно сделать одним единственным образом $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AA_1} + y \cdot \overrightarrow{AA_2}$

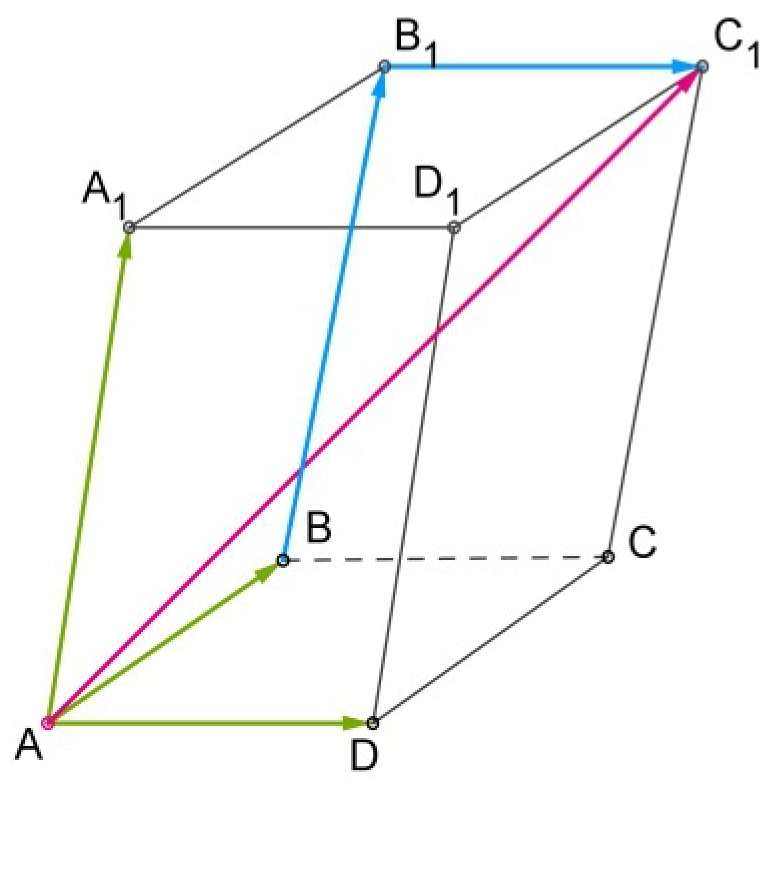
Закон параллелепипеда

Если три вектора не компланарны, то для их сложения в пространстве применяет закон параллелепипеда.

1. Векторы приводят к общему началу A;

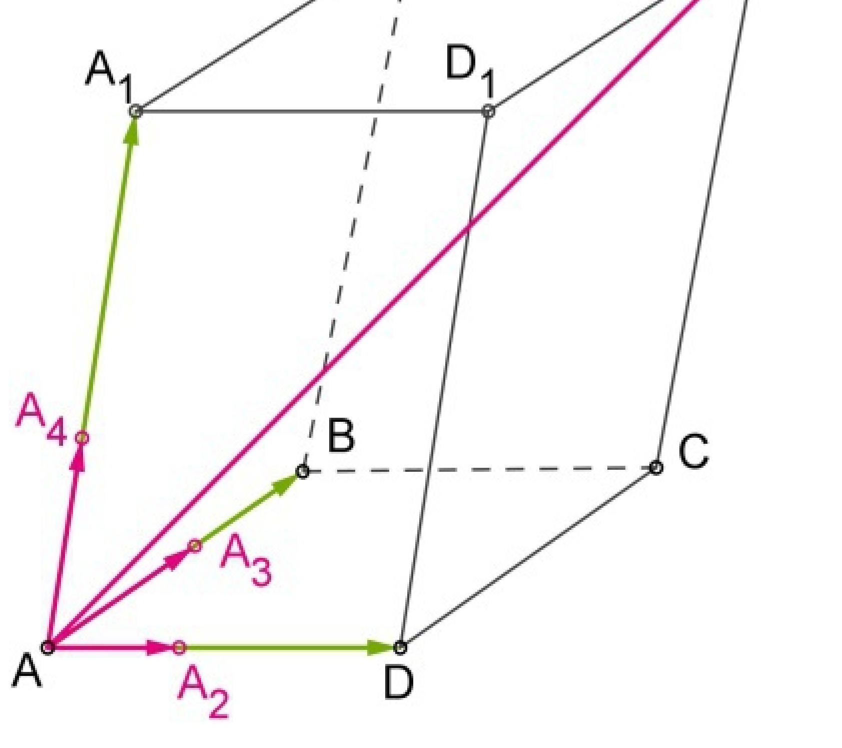


2. На этих трёх рёбрах строит параллелепипед;
3. Диагональ параллелепипеда, которая выходит из этой же точки, изображает суммы векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$



Разложение вектора по трем не компланарным векторам

Теорема о разложении по базису в пространстве.
Любой вектор $\vec{d}$ можно разложить по трём данным не компланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, причём реальные коэффициенты разложения x, y и z определяются единственным образом:
$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = x \cdot \overrightarrow{AA_2} + y \cdot \overrightarrow{AA_3} + z \cdot \overrightarrow{AA_4}$



Источники:
Л. С. Атанасян; В. Ф. Бутузов; С. Б. Кадомцев; Л. С. Киселева; Э. Г. Позняк "Геометрия 10 - 11 классы" Москва, "Просвещение" 2009
http://www.mathematics.ru/courses/stereometry/content/chapter9/section/paragraph2/theory.html